NHÓM GIẢNG VIÊN TOÁN - ĐHSP HÀ NỘI
NGUYỄN MẠNH HÙNG(Chủ biên)

HƯỚNG DẪN ÔN LUYỆN THI MÔN TOÁN

TẬP IV

HÌNH HỌC

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÓM GIẢNG VIÊN TOÁN – ĐHSP HÀ NỘI
PGS. TSKH. NGUYỄN MẠNH HÙNG (chủ biên)
TH.S. CUNG THẾ ANH
TH.S. PHẠM TRIỀU DƯƠNG – NGUYỄN THÀNH ANH

HƯỚNG DẪN ÔN LUYỆN THI MÔN TOÁN

TẬP IV

HÌNH HỌC

- Ôn luyện thi đại học và cao đẳng
- Thi tốt nghiệp Trung học phổ thông
- Bồi dưỡng học sinh khá - giỏi

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Giám đốc **NGUYỄN VĂN THOẢ**
Tổng biên tập **NGUYỄN THIỆN GIÁP**

Biên tập:

NGỌC QUYÊN

Sửa bản in và trình bày bìa:

ĐINH QUANG HÙNG

HƯỚNG DẪN ÔN LUYỆN THI MÔN TOÁN TẬP IV – HÌNH HỌC

Mã số: 01.241.ĐH2002
In 1.500 cuốn tại Xí nghiệp In Bắc Thái.
Giấy phép xuất bản số: 18/1247/CXB. Số trích ngang: 24 KH/XB
In xong và nộp lưu chiểu quý I năm 2003.

LỜI NÓI ĐẦU

Nội dung của tập IV bao gồm những vấn đề về Hình học. Hai chương đầu trình bày những nội dung chủ yếu của Hình học giải tích. Chương III trình bày một cách hệ thống những phương pháp giải toán hình học, giúp người học nắm vững và vận dụng được các phương pháp đó. Ngoài ra, tập sách còn có phần phụ lục giới thiệu các đề thi Đại học môn Toán năm 2002, có kèm theo đáp án chi tiết, để bạn đọc có thể tự kiểm chứng kết quả học tập của mình.

Các bạn học sinh lớp 12, các bạn đang chuẩn bị thi vào Đại học, Cao đẳng đều có thể sử dụng tập sách này làm tài liệu ôn luyện có hiệu quả. Các Thầy cô giáo dạy môn Toán cũng có thể sử dụng nó như một tài liệu tham khảo hữu ích.

Chúc các bạn thành công!

CÁC TÁC GIẢ

MỤC LỤC

Chủ đề I. PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG 5

§1. Đường thẳng 5

§2. Đường tròn 23

§3. Các đường Cônic 41

Chủ đề II. PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN 67

§1. Vectơ. Toạ độ của vectơ và của điểm 67

§2. Mặt phẳng 76

§3. Đường thẳng 86

§4. Mặt cầu 101

Chủ đề III. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN HÌNH HỌC 111

§1. Phương pháp vectơ 111

§2. Phương pháp toạ độ 120

§3. Phương pháp tổng hợp 129

HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ 140

Phụ lục: GIỚI THIỆU CÁC ĐỀ THI ĐẠI HỌC MÔN TOÁN NĂM 2002 175
(KHỐI A, B, D)

CHỦ ĐỀ I

PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

§1. ĐƯỜNG THẲNG

1. Lập phương trình đường thẳng:

• Đường thẳng đi qua điểm $M_0(x_0; y_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B)$ có phương trình tổng quát:

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) = 0$$

Ngược lại, phương trình $Ax + By + C = 0$, với $A^2 + B^2 \neq 0$, biểu thị một đường thẳng có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (A; B)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (-B; A)$.

• Đường thẳng đi qua điểm $M_0(x_0; y_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b)$ có phương trình tham số:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \quad (t \in R)$$

hoặc dạng chính tắc:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$$

Do đó để viết phương trình một đường thẳng ta cần tìm một điểm và một vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ (hoặc một vectơ chỉ phương $\vec{u}$) của đường thẳng.

VÍ DỤ 1.1

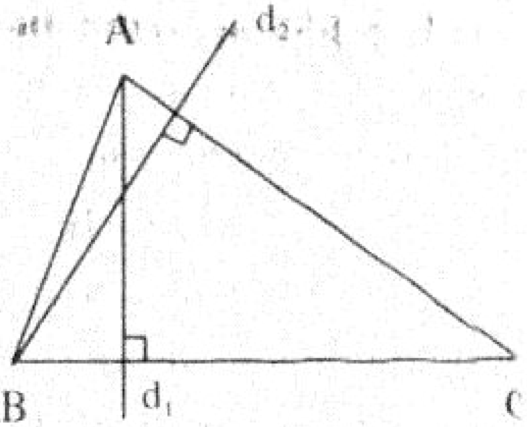
Lập phương trình các cạnh của ΔABC trong mặt phẳng với hệ tọa độ trực chuẩn Oxy, nếu cho $C(-4; -5)$ và hai đường cao có phương trình:

(d_1): $5x + 3y - 4 = 0$ và (d_2): $3x + 8y + 13 = 0$

(ĐHSP Hà Nội II, 1995)

LỜI GIẢI

Để thấy C(-4; -5) không thuộc các đường cao (d_1), (d_2) đã cho. Giả sử (d_1), (d_2) lần lượt là các đường cao xuất phát từ A và B.



- $BC \perp (d_1) \Rightarrow$ BC có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = (3; -5)$. BC là đường thẳng đi qua C (-4; -5) và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = (3; -5)$ nên có phương trình:

$$3(x + 4) - 5(y + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x - 5y - 13 = 0$$

- $AC \perp (d_2) \Rightarrow$ AC có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_2 = (8; 3)$. AC là đường thẳng đi qua C(-4; -5) và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_2 = (8; 3)$ nên có phương trình:

$$8(x + 4) - 3(y + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 8x - 3y + 17 = 0$$

- Toạ độ $A = AC \cap (d_1)$, $B = BC \cap (d_2)$ lần lượt là nghiệm của các hệ phương trình:

$$\begin{cases} 8x - 3y + 17 = 0 \\ 5x + 3y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow A(-1;3)$$

$$\begin{cases} 3x - 5y - 13 = 0 \\ 3x + 8y + 13 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow B(1;-2)$$

AB là đường thẳng đi qua A(-1; 3) và B (1; -2) nên có phương trình:

$$\frac{x+1}{1+1} = \frac{y-3}{2-3} \quad \Leftrightarrow \quad 5x + 2y - 1 = 0$$

VÍ DỤ 1.2

Phương trình hai cạnh của một tam giác trong mặt phẳng toạ độ là

$5x - 2y + 6 = 0; \qquad 4x + 7y - 21 = 0$

Viết phương trình cạnh thứ ba của tam giác, biết trực tâm tam giác trùng với gốc toạ độ.

(ĐHBK Hà Nội, 1994)

LỜI GIẢI

Giả sử phương trình hai cạnh AB, AC của ΔABC là:

AB: $5x - 2y + 6 = 0$

AC: $4x + 7y - 21 = 0$

Toạ độ đỉnh A là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 5x - 2y + 6 = 0 \\ 4x + 7y - 21 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow A(0; 3)$$

Đường cao BO qua O (0, 0) và vuông góc AC nên có phương trình

$7(x-0) - 4(y-0) = 0 \Leftrightarrow 7x - 4y = 0$

Toạ độ $B = (BO) \cap (AB)$ là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 7x - 4y = 0 \\ 5x - 2y + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -7 \end{cases} \Rightarrow B(-4; -7)$$

BC là đường thẳng qua B(-4; -7) và nhận $\overline{OA} = (0; 3)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình:

$0(x + 4) + 3(y + 7) = 0 \Leftrightarrow y = -7$

Chú ý: Cho đường thẳng (Δ): $Ax + By + C = 0$ $(A^2 + B^2 \neq 0)$

Đường thẳng song song với (Δ) có dạng: $Ax + By + C_1 = 0$

Đường thẳng vuông góc với (Δ) có dạng: $Bx + Ay + C_2 = 0$

VÍ DỤ 1.3

Lập phương trình các cạnh của hình vuông biết rằng hình vuông đó có đỉnh là (-4; 8) và một đường chéo có phương trình: $7x - y + 8 = 0$.

(ĐH Văn hóa Hà Nội, 1995)

LỜI GIẢI

Giả sử đỉnh A của hình vuông ABCD có tọa độ A(-4; 8).

Dễ thấy đỉnh A không thuộc đường chéo $7x - y + 8 = 0$ nên $7x - y + 8 = 0$ là phương trình đường chéo BD.

• Đường chéo $AC \perp BD$ nên AC có phương trình: $x + 7y + C = 0$.

Do $A(-4; 5) \in (AC)$ nên: $-4 + 35 + C = 0 \Rightarrow C = -31$.

Do đó phương trình đường chéo AC là: $x + 7y - 31 = 0$.

• Gọi Δ là đường thẳng đi qua A (-4; 5) và có hệ số góc k. Phương trình (Δ) có dạng:

$y - 5 = k(x + 4) \Leftrightarrow kx - y + 4k + 5 = 0$ (Δ)

(Δ) hợp với (AC) một góc 45^0

$$\Leftrightarrow \cos 45^0 = \frac{|k-7|}{\sqrt{k^2+1}.\sqrt{1^2+7^2}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|k-7|}{\sqrt{50}\ .\ \sqrt{k^2+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k-7)^2}{50(k^2+1)} = \frac{1}{2} \qquad \Leftrightarrow 12k^2 + 7k - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = \frac{3}{4} \\ k = -\frac{4}{3} \end{array}\right.$$

$$k = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow (\Delta):\ 3x - 4y + 32 = 0$$

$$k = -\frac{4}{3} \quad \Rightarrow (\Delta):\ 4x - 4y + 1 = 0$$

Vì AB và AD cùng tạo với đường chéo AC một góc 45^0 nên phương trình hai cạnh AB, AD là:

AB: $3x - 4y + 32 = 0$

AD: $4x + 3y + 1 = 0$

Tọa độ giao điểm $I = AC \cap BD$ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 7x - y + 8 = 0 \\ x + 7y - 31 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow I\left(-\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right)$$

Do I là trung điểm của AC nên:

$$\begin{cases} x_C = 2x_I - x_A = -1 - (-4) = 3 \\ y_C = 2y_I - y_A = 9 - 5 = 4 \end{cases} \Rightarrow C(3; 4)$$

- Cạnh BC // AD nên có phương trình dạng: $4x + 3y + C = 0$

Do $C(3; 4) \in BC$ nên: $12 + 12 + C = 0 \Rightarrow C = -24$

Vậy BC: $4x + 3y - 24 = 0$

- Cạnh CD // AB nên có phương trình dạng: $3x - 4y + C = 0$

$C(3; 4) \in CD$ nên: $9 - 16 + C = 0 \Rightarrow C = 7$

Vậy CD: $3x - 4y + 7 = 0$

Kết luận: Phương trình các cạnh của hình vuông là:

$3x - 4y + 32 = 0$; $4x + 3y + 1 = 0$

$3x - 4y + 7 = 0$ $4x + 3y - 24 = 0$

VÍ DỤ 1.4

Cho điểm P(3; 0) và hai đường thẳng

(d_1): $2x - y - 2 = 0$ và (d_2) : $x + y + 3 = 0$

Gọi (d) là đường thẳng qua (P) và cắt (d_1), (d_2) lần lượt ở A và B. Viết phương trình của (d) biết rằng PA = PB.

(ĐH Đà Nẵng, 1998)

LỜI GIẢI

Xét hai trường hợp

* Trường hợp 1: d // Oy

Phương trình của (d) là: $x = 3$

$\Rightarrow$ (d) cắt (d_1) và (d_2) lần lượt tại A (3; 4), B (3; -6)

Ta có : PA = 4, PB = 6. Vậy trường hợp này không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

* Trường hợp 2: d // Oy

Phương trình đường thẳng (d) có dạng: $y = k(x - 3)$

Tọa độ của $A = (d) \cap (d_1)$ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ y = kx - 3k \end{cases} \qquad \Rightarrow A\left(\frac{3k-2}{k-2}; \frac{4k}{k-2}\right) \qquad (k \neq 2)$$

Tọa độ của B= $(d_1) \cap (d)$ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + y + 3 = 0 \\ y = kx - 3k \end{cases} \qquad \Rightarrow B\left(\frac{3k-3}{k+1}; \frac{-6}{k+1}\right)$$

Ta có:

$$PA^2 = PB^2 \Leftrightarrow PA^2 = PB^2 \Leftrightarrow \left(\frac{3k-2}{k-2} - 3\right)^2 + \left(\frac{4k}{k-2}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{3k-3}{k+1} - 3\right)^2 + \left(\frac{-6k}{k+1}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \frac{4 + 4k^2}{(k-2)^2} = \frac{9 + 9k^2}{(k+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \neq -2;\ k \neq -1 \\ 4\left(1 + k^2\right)(k + 1) = 9\left(1 + k^2\right)(k - 2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \neq -2;\ k \neq 1 \\ 4(k + 1)^2 = 9(k - 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq -2;\ k \neq 1 \\ (-k + 8)(5k - 4) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = \dfrac{4}{5} \\ k = 8 \end{array}\right.$$

Vậy có hai đường thẳng (d) thoả mãn yêu cầu đề bài là:

$$y = \frac{4}{5}x - \frac{12}{5} \quad \text{và} \quad y = 8x - 24$$

• Cho hai đường thẳng cắt nhau:

(Δ) : $Ax + By + C = 0$

(Δ'): $A'x + B'y + C = 0$

Khi đó mọi đường thẳng đi qua giao điểm I của (Δ) và (Δ') có phương trình dạng:

$\lambda\,(Ax + By + C) + \mu\,(A'x + B'y + C') = 0\ (\lambda^2 + \mu^2 \neq 0)$

Tập hợp các đường thẳng đó gọi là chùm đường thẳng tâm I.

Ta thường sử dụng phương trình chùm đường thẳng để viết phương trình đường thẳng đi qua giao điểm của hai đường thẳng và thỏa mãn thêm một điều kiện nào đó, chẳng hạn đi qua một điểm, hoặc song song hoặc vuông góc với một đường thẳng khác.

VÍ DỤ 1.5

Cho ΔABC có đỉnh $A(-1; -3)$.

a. Biết hai đường cao có phương trình:

BH: $5x + 3y - 25 = 0$; *CK:* $3x + 8y - 12 = 0$

Viết phương trình đường cao AL.

b. Viết phương trình đường thẳng BC nếu biết đường trung trực của BC là $3x + 2y - 4 = 0$ *và tọa độ trọng tâm* $G(4; -2)$ *của* ΔABC.

(ĐH Cần Thơ, 1998)

LỜI GIẢI

a. Đường cao AL thuộc chùm xác định bởi hai đường thẳng BH, CK nên có phương trình dạng: .

$\lambda(5x + 3y - 25) + \mu(3x + 8y - 12) = 0$

$\Leftrightarrow (5\lambda + 3\mu)x + (3\lambda + 8\mu)y - (25\lambda + 12\mu) = 0$

Vì $A \in AL$ nên:

$(5\lambda + 3\mu)(-1) + (3\lambda + 8\mu)(-3) - (25\lambda + 12\mu) = 0$

$\Leftrightarrow -39\lambda - 13\mu = 0 \quad \Leftrightarrow 3\lambda + \mu = 0$

Chọn $\lambda = 1$, $\mu = -3$ ta được phương trình đường cao AL là: $2x - 5y - 13 = 0$

b. Phương trình đường thẳng AG:

$$\frac{x+1}{4+1} = \frac{y+3}{-2+3} \quad \Leftrightarrow \quad x - 5y - 14 = 0$$

Đường thẳng BC thuộc chùm xác định bởi hai đường thẳng AG và trung trực của BC nên có phương trình dạng:

$\lambda(x - 5y - 14) + \mu(3x + 2y - 4) = 0$

$\Leftrightarrow (\lambda + 3\mu)x + (2\lambda - 5\lambda)y - (14\lambda + 4\mu) = 0$

Vì cạnh BC vuông góc với trung trực của nó nên:

$3(\lambda + 3\mu) + 2(2\mu - 5\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow 13\mu - 7\lambda = 0$

Chọn $\lambda = 13$, $\mu = 7$ ta được phương trình của cạnh BC là: $34x - 51y - 210 = 0$.

2. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng:

$$(\Delta) : Ax + By + C = 0$$

$$(\Delta') : A'x + B'y + C' = 0$$

Khi đó: (Δ) và (Δ') cắt nhau $\Leftrightarrow \dfrac{A}{A'} \neq \dfrac{B}{B'}$

(Δ) và (Δ') song song với nhau $\Leftrightarrow \dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} \neq \dfrac{C}{C'}$

(Δ) và (Δ') trùng với nhau $\Leftrightarrow \dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'}$

VÍ DỤ 1.6

Cho $a^2 + b^2 \geq 0$ và hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình:

(d_1): $(a - b)x + y - 1 = 0$ và

(d_2): $(a^2 - b^2)x + ay - b = 0$

Xác định giao điểm của (d_1) và (d_2). Biện luận theo a, b.

(ĐH Y khoa Hà Nội, 1995)

LỜI GIẢI

Tọa độ giao điểm của (d_1) và (d_2) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} (a-b)x + y - 1 = 0 \\ (a^2 - b^2)x + ay - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)x + y = 1 \\ (a^2 - b^2)x + ay = b \end{cases} \quad (1)$$

Lập các định thức:

$$D = \begin{vmatrix} a-b & 1 \\ a^2 + b^2 & a \end{vmatrix} = b(b-a)$$

$$Dx = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & a \end{vmatrix} = a - b$$

$$Dy = \begin{vmatrix} a - b & 1 \\ a^2 + b^2 & b \end{vmatrix} = a(b - a)$$

a. Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq b \\ b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$ (vì $a^2 + b^2 > 0$) thì hệ (1) có nghiệm:

$$\begin{cases} x = \dfrac{Dx}{D} = \dfrac{1}{b} \\ y = \dfrac{Dy}{D} = \dfrac{a}{b} \end{cases}$$

Do đó nếu $\begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$ thì (d_1) cắt (d_2) tại điểm $A\left(\dfrac{1}{b}; \dfrac{a}{b}\right)$.

b. Nếu $D = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ a = b \end{array}\right.$

+ Nếu b = 0 thì $Dx = a \neq 0$ (vì $a^2 + b^2 \neq 0$) $\Rightarrow$ (1) vô nghiệm.

$\Rightarrow (d_1) // (d_2)$.

+ Nếu a = b thì $D = Dx = Dy = 0 \Rightarrow$ (1) có vô số nghiệm

$\Rightarrow (d_1) \equiv (d_2)$.

VÍ DỤ 1.7

Trong mặt phẳng cho hai đường thẳng (D_1) và (D_2) có phương trình: (D_1): $kx - y + k = 0$

(D_2): $(1 - k^2) + 2ky - (1 - k^2) = 0$.

a. CMR khi k thay đổi, đường thẳng (d_1) luôn đi qua một điểm cố định.

b. Với mỗi giá trị k, hãy xác định giao điểm của (D_1) và (D_2).

c. Tìm quỹ tích của giao điểm đó khi k thay đổi.

LỜI GIẢI

a. $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định của (D_1)

$\Leftrightarrow k(x_0 + 1) - y_0 = 0, \quad \forall k$

$$\begin{cases} x_0 + 1 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

Vậy (D_1) luôn đi qua điểm cố định $M_0(-1; 0)$.

b. Tọa độ giao điểm của (D_1) và (D_2) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} kx - y + k = 0 \\ (1 - k^2)x + 2ky - (1 - k^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1 - k^2}{1 + k^2} \\ y = \dfrac{2k^2}{1 + k^2} \end{cases}$$

c. Đặt $k = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \cos\alpha \\ y = \sin\alpha \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$

Dễ thấy $x = \dfrac{1 - k^2}{1 + k^2} \neq -1, \quad \forall k$

Vậy quỹ tích M là đường tròn tâm O, bán kính 1, loại bỏ điểm $M_0(1; 0)$.

3. Khoảng cách và góc

Cho hai đường thẳng: (Δ): $Ax + By + C = 0$

(Δ'): $A'x + B'y + C' = 0$

Góc φ ($0^0 \le \varphi \le 90^0$) giữa hai đường thẳng (Δ) và (Δ') được xác định bởi:

$$\cos\varphi = \frac{|AA'+BB'|}{\sqrt{A^2+B^2}\,\sqrt{A'^2+B'^2}}$$

Đặc biệt $\Delta \perp \Delta' \Leftrightarrow AA' + BB' = 0$

VÍ DỤ 1.8

Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm A(0, 1) và tạo với đường thẳng x + 2y + 3 = 0 một góc bằng 45^0.

(ĐH Kinh tế Quốc dân, 1999)

LỜI GIẢI

Gọi đường thẳng đã cho là (d): x + 2y + 3 = 0.

Dễ thấy đường thẳng đi qua A và song song với Oy không thỏa mãn yêu cầu bài toán. Do đó phương trình đường thẳng cần lập có dạng (Δ): $y = k(x - 0) + 1$

$$\Leftrightarrow kx - y + 1 = 0$$

(Δ) tạo với (d) một góc $45^0 \Leftrightarrow \dfrac{|k-2|}{\sqrt{5(k^2+1)}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow 2(k-2)^2 = 5(k^2+1) \Leftrightarrow 3k^2 + 8k - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = -3 \\ k = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

Vậy có hai đường thẳng thỏa mãn đề bài là:

$y = -3x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3x + y - 1 = 0$

$y = \dfrac{1}{3}x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x - 3y + 1 = 0$

Khoảng cách từ điểm M_0 (x_0; y_0) đến đường thẳng

(Δ): $Ax + By + C = 0$ tính theo công thức:

$$d(M_0, \Delta) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

VÍ DỤ 1.9

Viết phương trình của đường thẳng đi qua điểm A(1;2) mà khoảng cách từ điểm M(2; 3) và điểm N(4; -5) đến đường thẳng ấy bằng nhau.

LỜI GIẢI

Dễ thấy đường thẳng đi qua A và song song với Oy (có phương trình $x = 1$) không thỏa mãn yêu cầu bài toán. Do đó: phương trình đường thẳng cần tìm (Δ) có dạng:

$$y - 2 = m(x - 1) \quad \Leftrightarrow \quad mx - y + 2 - m = 0.$$

$$d(M, \Delta) = d(N, \Delta) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|m - 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{|3m + 7|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

$$\Leftrightarrow \quad |m - 1| = |3m + 7| \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3m + 7 = m - 1 \\ 3m + 7 = -(m - 1) \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = -4 \\ m = -\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

$$m = -\frac{3}{2} \qquad \Rightarrow (\Delta_1): \quad 3x + 2y - 7 = 0$$

$$m = -4 \qquad \Rightarrow (\Delta_2): \quad 4x + y - 6 = 0$$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRUNG TÂM THÔNG TIN THƯ VIỆN
No LC/729

Vậy có hai đường thẳng cần tìm là:

$3x + 2y - 7 = 0$ và $4x + y - 6 = 0$

Chú ý: Mỗi đường thẳng (Δ): $Ax + By + C = 0$ chia mặt phẳng tọa độ thành hai nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng (Δ):

- Một phần gồm những điểm có tọa độ thỏa mãn:

$$Ax + By + C \geq 0$$

- Nửa còn lại gồm những điểm có tọa độ thỏa mãn

$$Ax + By + C \leq 0$$

Do đó:

- Hai điểm $M_1(x_1; y_1)$ và $M_2(x_2; y_2)$ nằm về 2 phía của đường thẳng (Δ) $\Leftrightarrow (Ax_1 + By_1 + C)(Ax_2 + By_2 + C) < 0$.

- Hai điểm $M_1(x_1; y_1)$ và $M_2(x_2; y_2)$ nằm về cùng một phía của đường thẳng (Δ) $\Leftrightarrow (Ax_1 + By_1 + C)(Ax_2 + By_2 + C) > 0$.

Sử dụng chú ý này các bạn có thể giải quyết những bài toán phức tạp hơn về đường thẳng, chẳng hạn viết phương trình đường phân giác trong của tam giác.

Xét ví dụ sau:

VÍ DỤ 1.10

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ trực chuẩn Oxy, cho ΔABC *với các đỉnh* $A(-6; -3)$, $B(-4; 3)$ *và* $C(9; 2)$.

a. Viết phương trình đường thẳng (d) chứa đường phân giác trong góc A của tam giác ABC.

b. Tìm điểm P trên đường thẳng (d) sao cho tứ giác ABPC là hình thang.

(ĐHSP Hà Nội II, 1999)

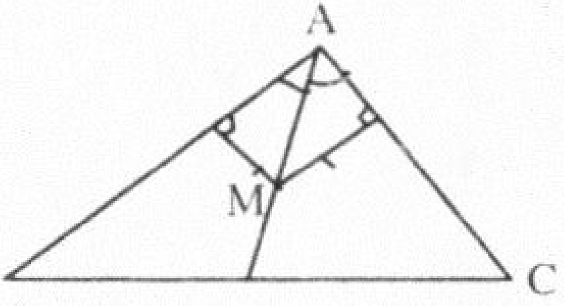
LỜI GIẢI

a. Phương trình cạnh AB: $\frac{x+6}{-4+6} = \frac{y+3}{3+3}$ $\Leftrightarrow 3x - y + 15 = 0$

Phương trình cạnh AC: $\frac{x+6}{-9+6} = \frac{y+3}{2+3}$ $\Leftrightarrow x - 3y - 3 = 0$

M(x, y) thuộc đường phân giác trong của góc A

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d(M, AB) = d(M, AC) \\ \text{M và B ở cùng phía so với AC} \\ \text{M và C ở cùng phía so với AB} \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|3x - y + 15|}{\sqrt{10}} = \frac{|x - 3y - 3|}{\sqrt{10}} \\ (x - 3y + 3)(-4 - 3.3 + 3) > 0 \\ (3x - y + 15)(3.9 - 2 + 15) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |3x - y + 15| = |x - 3y - 3| \\ x - 3y + 3 > 0 \\ 3x - y + 15 > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow 3x - y + 15 = -(x - 3y - 3)$

$\Leftrightarrow 4x - 4y + 12 = 0 \Leftrightarrow x - y + 3 = 0$

b. Xét hai trường hợp

TH1: AB // PC

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2; 6)$, $\overrightarrow{CP} = (x_0 - 9; y_0 - 2)$

AB // PC $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} // \overrightarrow{CP} \Leftrightarrow \frac{x_0 - 9}{2} = \frac{y_0 - 2}{6} \Leftrightarrow 3x_0 - y_0 = 25$ (1)

Vì (P) ∈ d nên: $x_0 - y_0 + 3 = 0 \Leftrightarrow x_0 - y_0 = -3$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ:

$$\begin{cases} 3x_0 - y_0 = 25 & (1) \\ x_0 - y_0 = -3 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 14 \\ y_0 = 17 \end{cases} \Rightarrow P(14;\ 17)$$

TH2: AC // BP

Ta có: $\overrightarrow{AC} = (15; 5)$, $\overrightarrow{BP} = (x_0 + 4; y_0 - 3)$

$$AC \,//\, BP \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \,//\, \overrightarrow{BP} \Leftrightarrow \frac{x_0 + 4}{15} = \frac{y_0 - 3}{5}$$

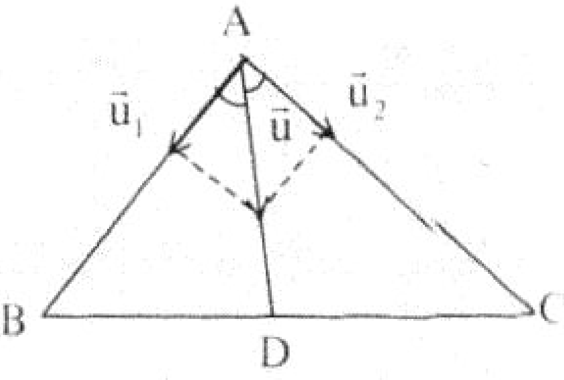
$\Rightarrow x_0 - 3y_0 = -13$

Ta có hệ:

$$\begin{cases} x_0 - 3y_0 = -13 \\ x_0 - y_0 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 3 \end{cases} \Rightarrow P(2;\ 5)$$

Vậy có hai điểm P thỏa mãn đề bài là: P (14; 17) và P (2; 5)

Chú ý: Các bạn có thể viết phương trình đường phân giác trong AD của ΔABC bằng cách tìm một vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của AD như sau:



+ Chuẩn hóa $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$

$$\vec{u}_1 = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|},\ \vec{u}_2 = \frac{\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}$$

$$\left(\left|\vec{u}_1\right| = 1, \left|\vec{u}_2\right| = 1,\ \vec{u}_1 \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB},\ \vec{u}_2 \uparrow\uparrow \overrightarrow{AC}\right)$$

+ Vectơ chỉ phương của AD là: $\vec{u}_1 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$

BÀI TẬP

1. Trong mặt phẳng Oxy, lập phương trình tổng quát của đường thẳng d trong các trường hợp sau:

a) d đi qua hai điểm A(3; -2) và B (5; 1)

b) d cắt trục Ox tại C (5; 0) và cắt trục Oy tại D(0; -3)

c) d đi qua điểm E (3; -4) và có hệ số góc $k = \frac{2}{5}$

d) d đi qua điểm M(1; 3) và song song với đường thẳng $2x + y + 3 = 0$

e) d đi qua điểm N(-3; 4) và vuông góc với đường thẳng $2x - 5y - 1 = 0$.

2. Lập phương trình các cạnh tam giác ABC nếu biết A(1; 3) và hai đường trung tuyến có phương trình là:

$$x - 2y + 1 = 0 \text{ và } y - 1 = 0$$

3. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng (d): $3x + 4y - 12 = 0$.

a) Xác định tọa độ các giao điểm A, B của (d) với các trục Ox, Oy.

b) Tính tọa độ hình chiếu H của gốc O trên đường thẳng d.

c) Viết phương trình đường thẳng (d') đối xứng với d qua O.

4. Trong mặt phẳng cho hệ tọa độ Đêcac Oxy và các điểm A(2; 1), B(0; 1), C(3; 5), D(-3; -1).

a) Tính diện tích tứ giác ABCD.

b)Viết phương trình các cạnh của hình vuông có hai cạnh song song đi qua A và C và hai cạnh còn lại đi qua B và D.

5. Cho hai điểm A(-1; 2) và B(3; 4). Tìm C trên đường thẳng $x - 2y + 1 = 0$ sao cho ΔABC vuông ở C.

6. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ trực chuẩn Oxy, cho đường thẳng (d) có phương trình:

(d): $x\cos\alpha + y\sin\alpha + 2\cos\alpha + 1 = 0$, trong đó α là tham số.

a) Chứng minh rằng khi α thay đổi, đường thẳng (d) luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

b) Cho điểm J(-2; 1). Dựng JH vuông góc với (d), ($H \in (d)$) và kéo dài JH một đoạn HK = 3 JH. Tính tọa độ điểm K theo α.

7. Cho đường thẳng (D): $2x + y - 4 = 0$ và hai điểm M (3; 3), N(-5; 19) trên mặt phẳng tọa độ. Hạ $MK \perp (D)$ và gọi P là điểm đối xứng của M qua (D).

a) Tìm tọa độ của K và P.

b) Tìm điểm A trên (D) sao cho AM + AN có giá trị nhỏ nhất và tìm giá trị đó.

8. Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua giao điểm của hai đường thẳng:

$2x - 5y + 3 = 0$, $x - 3y - 7 = 0$ và

a) Vuông góc với đường thẳng (Δ): $4x + y - 1 = 0$

b) Song song với đường thẳng (Δ'): $3x + 4y - 1 = 0$

9. Cho hai đường thẳng (Δ_1) và (Δ_2) có phương trình tham số:

$$(\Delta_1): \begin{cases} x = -2t \\ y = -3t \end{cases} \qquad (\Delta_2): \begin{cases} x = 1 + 3t' \\ y = 3 + 6t' \end{cases}$$

a) Xác định giao điểm của (Δ_1) và (Δ_2)

b) Tính cosin của góc nhọn tạo bởi (Δ_1) và (Δ_2).

10. Cho hai điểm P(2, 5) và Q(5, 1). Lập phương trình đường thẳng qua P sao cho khoảng cách từ đường thẳng đó đến Q bằng 3.

11. Trong mặt phẳng Oxy cho ΔABC với A(2; 0), B(4; 1), C(1; 2). Hãy lập phương trình đường phân giác trong của các góc B, C của ΔABC.

12. Cho họ đường thẳng $(x - 1)\cos\alpha + (y - 1)\sin\alpha - 4 = 0$.

a) Tìm các điểm thuộc mặt phẳng mà không có đường thẳng nào đi qua.

b) Chứng minh rằng mọi đường thẳng của họ luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

§2. ĐƯỜNG TRÒN

1. Lập phương trình đường tròn.

- Đường tròn tâm I(a, b), bán kính R có phương trình

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

- Phương trình: $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$, với $a^2 + b^2 \geq c$, biểu thị đường tròn tâm I(-a, -b), bán kính $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

VÍ DỤ 2.1

Lập phương trình đường tròn thỏa mãn một trong các điều kiện sau đây:

a) Có đường kính AB với A(4; 0), B(0, -3).

b) Đi qua 3 điểm C(-5; 0), D(1; 0), E(-3; 4).

c) Đi qua điểm M(1; 2) và tiếp xúc với đường thẳng $3x - 4y + 2 = 0$ tại điểm N(-2; -1).

LỜI GIẢI

a. Giả sử M(x, y), ta có: $\overrightarrow{AM} = (x - 4; y - 0)$, $\overrightarrow{BM} = (x - 0; y + 3)$

M(x, y) ∈ đường tròn đường kính AB $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$

$\Leftrightarrow x(x - 4) + y(y + 3) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x + 3y = 0$

Chú ý: Có thể tìm tọa độ tâm I là trung điểm của đoạn AB và bán kính $r = \dfrac{AB}{2}$, rồi viết phương trình đường tròn khi biết tâm và bán kính.

b. Phương trình đường tròn cần tìm có dạng:

$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$

Vì C, D, E đều thuộc đường tròn nên tọa độ của chúng thỏa mãn phương trình đường tròn. Do đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 25 - 10a + c = 0 \\ 1 + 2a + c = 0 \\ 25 - 6a + 8b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = -5 \end{cases}$$

Do đó phương trình đường tròn đi qua ba điểm C, D, E là:

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 5 = 0$$

Chú ý: Có thể lập phương trình các đường trung trực của hai đoạn CD, DE và tìm giao điểm của hai đường đó, tức là tâm đường tròn cần tìm. Sau đó tìm bán kính và viết phương trình của đường tròn khi biết tâm và bán kính.

c. Tâm I của đường tròn là giao điểm của đường trung trực của đoạn MN với đường vuông góc tại N của đường thẳng:

$$3x - 4y + 2 = 0.$$

Phương trình đường trung trực của MN là $x + y = 0$.

Phương trình đường thẳng IN là: $4x + 3y + 11 = 0$

Tọa độ I là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 4x + 3y + 11 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -11 \\ y = 11 \end{cases} \Rightarrow I(-11; 11)$$

Ta có: $R = \left|\overrightarrow{IN}\right| = \sqrt{(-2+11)^2 + (-1-11)^2} = \sqrt{225} = 15$

Vậy đường tròn cần tìm có phương trình:

$(x + 11)^2 + (y - 11)^2 = 225$

VÍ DỤ 2.2

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy cho hai điểm A(8; 0), B(0; 6). Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác OAB.

LỜI GIẢI

Tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác OAB là giao điểm của các đường phân giác trong của các góc O và B.

Vì $OA \perp OB$ nên phương trình đường phân giác trong của góc O là: $y = x$ (d_1).

Ta có: $\overrightarrow{BO} = (0;\ -6)$, $\overrightarrow{BA} = (8;\ -6)$

Chuẩn hoá các vectơ $\overrightarrow{BO}$ và $\overrightarrow{BA}$:

$$\overrightarrow{u_1} = \frac{\overrightarrow{BO}}{BO} = (0;\ -1), \qquad \overrightarrow{u_2} = \frac{\overrightarrow{BA}}{BA} = \left(\frac{4}{5};\ -\frac{3}{5}\right)$$

Do đó một vectơ chỉ phương của đường phân giác trong góc B là:

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 = \left(\frac{4}{5};\ -\frac{8}{5}\right)$$

Vậy phương trình đường phân giác trong đỉnh B là:

$$\frac{x-0}{\frac{4}{5}} = \frac{y-6}{-\frac{3}{5}} \qquad \Leftrightarrow \qquad 2x + y - 6 = 0 \quad (d_2)$$

Tọa độ $I = (d_1) \cap (d_2)$ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y = x \\ 2x + y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow I(2;\ 2)$$

Bán kính đường tròn nội tiếp $r = d(I, Ox) = 2$

Vậy phương trình đường tròn nội tiếp tam giác OAB là:

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$$

VÍ DỤ 2.3

Cho 3 điểm $A(x_1;\ y_1)$*,* $B(x_2;\ y_2)$*,* $C(x_3,\ y_3)$ *tìm quỹ tích các điểm M sao cho:* $AM^2 + BM^2 = CM^2$

LỜI GIẢI

Gọi (C) là tập hợp điểm cần tìm. Ta có:

$M(x, y) \in (C) \Leftrightarrow AM^2 + BM^2 = CM^2$

$\Leftrightarrow (x-x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (x-x_2)^2 + (y - y_2)^2 = (x-x_3)^2 + (y - y_3)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

với $a = x_1 + x_2 - x_3$, $b = y_1 + y_2 - y_3$

$c = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$

Do đó:

+ Nếu $a^2 + b^2 - c < 0$ thì $(\varepsilon) = \phi$

+ Nếu $a^2 + b^2 - c = 0$ thì $(\varepsilon) = \{(a;\ b)\}$.

+ Nếu $a^2 + b^2 - c > 0$ thì (ε) là đường tròn tâm $I\ (a;\ b)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$

VÍ DỤ 2.4

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho họ đường tròn (Cm) có phương trình:

$(Cm) : x^2 + y^2 - (m - 2)x + 2my - 1 = 0$

a) Tìm tập hợp tâm các đường tròn C_m.

b) Chứng tỏ rằng các đường tròn này đều đi qua hai điểm cố định khi m thay đổi.

LỜI GIẢI

a. Viết phương trình (C_m) dưới dạng:

$$\left[x-\frac{1}{2}(m-2)\right]^2+(y+m)^2=\frac{1}{4}(m-2)^2+m^2+4$$

Vì $\frac{1}{4}(m-2)^2+m^2+4>0,\ \forall m$ nên (C_m) là đường tròn tâm I $(x_0;\ y_0)$ với:

$$\begin{cases} x_0=\frac{1}{2}(m-2) & (1)\\ y_0=-m & (2)\end{cases}$$

Khử m ở (1) và (2) ta được : $2x_0+y_0+2=0$

Vậy quỹ tích tâm I là đường thẳng (d) có phương trình:

$$2x+y+2=0$$

b. $(x_0,\ y_0)$ là điểm cố định mà các đường tròn (C_m) đều đi qua

$$\Leftrightarrow x_0^2+y_0^2-(m-2)x_0+2my_0-1,\ \forall m.$$

$$\Leftrightarrow (2y_0-x_0)m+x_0^2+y_0^2+2x_0-1=0,\ \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y_0-x_0=0\\ x_0^2+y_0^2+2x_0-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_0=-2\\ y_0=-1\end{cases}\\ \begin{cases} x_0=\frac{2}{5}\\ y_0=\frac{1}{5}\end{cases}\end{array}\right.$$

Vậy (C_m) luôn đi qua hai điểm cố định:

A(-2; -1) và B$\left(\frac{2}{5};\ \frac{1}{5}\right)$

• Phương trình chùm đường tròn:

+ Phương trình của đường tròn đi qua giao điểm của đường thẳng $Ax + By + C = 0$ và đường tròn $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ có dạng:

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c + \lambda (Ax + By + C) = 0$$

+ Phương trình đường tròn đi qua giao điểm của hai đường tròn: $x2 + y2 + 2ax + 2by + c = 0$ và $x2 + y2 + 2a'x + 2b'y + c' = 0$ có dạng:

$$\lambda(x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c) + \mu(x^2 + y^2 + 2a'x + 2b'y + c) = 0$$

trong đó $\lambda + \mu \neq 0$.

Ta thường sử dụng phương trình chùm đường tròm trong bài toán: Viết phương trình đường tròn đi qua giao điểm của hai đường tròn (hoặc một đường thẳng và một đường tròn) và thoả mãn thêm một điều kiện nào đó (đi qua một điểm, tiếp xúc với một đường thẳng...).

VÍ DỤ 2.5

Cho hai đường tròn:

(C1): x2 + y2 - 2x + 4y - 4 = 0

(C2): x2 + y2 + 2x - 2y - 14 = 0

a) Chứng minh rằng: (C_1) *cắt* (C_2)

b) Viết phương trình đường tròn qua giao điểm của C1), (C2) và qua điểm M0(0,1).

c) Viết phương trình đường tròn qua giao điểm của C1), (C2) và tiếp xúc với đường thẳng có phương trình y = x.

LỜI GIẢI

a. Viết lại phương trình hai đường tròn

$$(C_1) : (x-1)^2 + (y + 2)^2 = 9$$

$$(C_2) : (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 16$$

Đường tròn (C_1) có tâm $I_1(1; -2)$, bán kính $R_1 = 3$.

Đường tròn (C_2) có tâm $I_2(-1; 1)$, bán kính $R_2 = 4$.

Ta có: $I_1 . I_2 = \sqrt{(1+1)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{13} < 7 = R_1 + R_2$

Vậy hai đường tròn (C_1) và (C_2) cắt nhau

b. Phương trình đường tròn (C) qua giao điểm của (C_1) và (C_2) có dạng:

$$\lambda(x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4) + \mu(x^2 + y^2 + 2x - 2y - 14) = 0(\lambda+\mu\neq0)$$

Vì C đi qua $M_0(0; 1)$ nên:

$$\lambda(0^2 + 1^2 - 2.0 + 4.1 - 4) + \mu(0^2 + 1^2 + 2.0 - 2.1 - 14) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda - 15\mu = 0.$$

Chọn $\lambda = 15$, $\mu = 1$, ta suy ra phương trình của đường tròn (C) cần tìm là:

$$16x^2 + 16y^2 - 28x - 58y - 74 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 8x^2 + 8y^2 - 14x - 29y - 37 = 0$$

c. Dễ thấy cả (C_1) và (C_2) không tiếp xúc với đường thẳng $y = x$, nên đường tròn cần tìm không phải là (C_1) và (C_2). Do đó phương trình của nó có dạng:

$$\lambda(x^2 + y^2 -2x + 4y - 4) + (x^2 + y^2 + 2x - 2y - 14) = 0 \ (\lambda \neq -1)$$

$$\Leftrightarrow (\lambda + 1)x^2 + (\lambda + 1)y^2 + 2(1 - \lambda)x + 2(2\lambda - 1)y - 4\lambda + 14 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\right)^2+\left(y-\frac{1-2\lambda}{\lambda+1}\right)^2=\frac{9\lambda^2+12\lambda+16}{(\lambda+1)^2} \quad (C')$$

Đường tròn (C') có tâm $I\left(\frac{\lambda-1}{\lambda+1};\ \frac{1-2\lambda}{\lambda+1}\right)$, bán kính

$$R=\sqrt{\frac{9\lambda^2+12\lambda+16}{(\lambda+1)^2}}$$

Đường thẳng y = x tiếp xúc với (C') ⇔ khoảng cách từ tâm I đến nó bằng bán kính R

$$\Leftrightarrow \frac{\left|\frac{\lambda-1}{\lambda+1}-\frac{1-2\lambda}{\lambda+1}\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{\frac{9\lambda^2+12\lambda+16}{(\lambda+1)^2}}$$

$$\Leftrightarrow (3\lambda-2)^2=2\left(9\lambda^2+12\lambda+16\right)$$

$$\Leftrightarrow 3\lambda^2+36\lambda+28=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\lambda=\frac{-6+2\sqrt{2}}{3}\\ \lambda=\frac{-6-2\sqrt{2}}{3}\end{array}\right.$$

Với $\lambda=\frac{-6+2\sqrt{2}}{3}$, phương trình đường tròn cần lập là:

$$\left(-3+2\sqrt{2}\right)x^2+\left(-3+2\sqrt{2}\right)y^2+2\left(9-2\sqrt{2}\right)x+2\left(4\sqrt{2}-15\right)y-$$
$$-2\left(4\sqrt{2}+9\right)=0$$

Với $\lambda=-\frac{6+2\sqrt{2}}{3}$, phương trình đường tròn cần tìm là:

$$\left(-3-2\sqrt{2}\right)x^2+\left(-3-2\sqrt{2}\right)y^2+2\left(9+2\sqrt{2}\right)x+2\left(-4\sqrt{2}-15\right)y+$$
$$+2\left(4\sqrt{2}-9\right)=0$$

2. Phương tích của một điểm đối với một đường tròn. Trục đẳng phương của hai đường tròn

• Cho đường tròn: (C): $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ và điểm $M_0(x_0;\ y_0)$. Khi đó phương tích của điểm M_0 đối với đường tròn đó được tính theo công thức:

$$P\mu_0/(c) = f(x_0;\ y_0) = x_0^2 + y_0^2 + 2ax_0 + 2by_0 + c$$

Do đó:

$P\mu_0/(c) > 0 \Leftrightarrow$ M ở miền ngoài của (C)

$P\mu_0/(c) < 0 \Leftrightarrow$ M ở miền trong của (C)

$P\mu_0/(c) = 0 \Leftrightarrow$ M nằm trên (C)

• Cho hai đường tròn:

$(C) : x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$

$(C'): x^2 + y^2 + 2a'x + 2b'y + c' = 0$

Trục đẳng phương của hai đường tròn (C), (C') là tập hợp những điểm $M(x_0, y_0)$ có cùng phương tích với (C), (C'). Do đó phương trình trục đẳng phương của (C) và (C') là:

$(\Delta) : 2(a - a')x + 2(b - b')y + (c - c') = 0$

VÍ DỤ 2.6

Cho họ đường cong

$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2m(x - a) = 0$, *với* $a > 0$

a) Với giá trị nào của m thì phương trình trên là phương trình của đường tròn. Kí hiệu (Cm) là đường tròn ứng với giá trị m.

b) Chứng tỏ đoạn nối điểm A(2a; 0) với điểm gốc 0 luôn luôn cắt đường tròn (Cm).

c) Chứng minh rằng tồn tại một đường thẳng là trục đẳng phương cho tất cả các đường tròn (Cm).

LỜI GIẢI

a. Ta có: $x^2 + y^2 - 2m(x - a) = 0$

$\Leftrightarrow (x - m)^2 + y^2 = m(m - 2a)$

Phương trình này là phương trình đường tròn $\Leftrightarrow m(m - 2a) > 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 2a \end{array}\right.$$

b. Ta tính phương tích của các điểm O, A đối với (Cm)

$P_0/(Cm) = f(0, 0) = 2ma$, $P_A/(Cm) = f(2a, 0) = 2a(2a - m)$

Do đó:

$P_0/(Cm) = P_A/(Cm) = 4a^2m(2a - m) < 0$ (theo a,)

Vậy trong hai điểm O, A phải có một điểm nằm trong và một điểm nằm ngoài (Cm), thành thử đoạn OA cắt (Cm).

c. Lấy hai đường tròn (Cm) và (Cm') bất kỳ ($m \neq m'$).

Trục đẳng phương của hai đường tròn này có phương trình:

$$x^2 + y^2 - 2m(x - a) = x^2 + y^2 - 2m'(x - a)$$

$\Leftrightarrow 2(m - m')(x - a) = 0 \Leftrightarrow x = a$ (vì $m \neq m'$).

Đường thẳng $x = a$ không phụ thuộc m, vậy nó là trục đẳng phương cho tất cả các đường tròn (Cm).

3. Tiếp tuyến của đường tròn. Tiếp tuyến chung của hai đường tròn

- Cho (C) là đường tròn tâm I(a, b), bán kính R. Đường thẳng (Δ) là tiếp tuyến của (C) $\Leftrightarrow$ (Δ) cách I một khoảng bằng R.

Có 3 bài toán về tiếp tuyến của đường tròn

- Viết phương trình tiếp tuyến tại tiếp điểm.
- Viết phương trình tiếp tuyến kẻ từ một điểm ngoài đường tròn.
- Viết phương trình tiếp tuyến có hệ số góc cho trước.

VÍ DỤ 2.7

Cho đường tròn (C) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) tại $M_0(x_0; y_0) \in (C)$.

Áp dụng: Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C):

$x^2 + y^2 - 6x + 8y - 25 = 0$ tại điểm A(-2; 1).

LỜI GIẢI

Đường tròn (C) có tâm I(a; b), bán kính R. Tiếp tuyến (Δ) của đường tròn (C) tại điểm $M_0(x_0; y_0)$ là đường thẳng đi qua $M_0(x_0; y_0)$ và nhận $\overrightarrow{IM_0} = (x_0 - a; y_0 - b)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình:

$$(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0$$

$$\Rightarrow (x_0 - a)[(x - a) - (x_0 - a)] + (y_0 - b)[(y - b) - (y_0 - b)] = 0$$

$$\Rightarrow (x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = (x_0 - a)^2 + (y - y_0)^2$$

$$\Rightarrow (x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = R^2$$

(Phương trình tách đôi toạ độ)

Áp dụng: Viết lại phương trình của (C) dưới dạng:

$$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 50$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm A(-2; 1) ∈ (C) là:

$$(x - 3)(-2 - 3) + (y + 4)(1 + 4) = 50$$

$$\Rightarrow \quad x - y + 3 = 0$$

VÍ DỤ 2.8

Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ và điểm A(2;5). Hãy tìm phương trình tiếp tuyến kẻ từ A đến đường tròn. Giả sử các tiếp tuyến tiếp xúc với đường tròn tại M và N. Hãy tính độ dài đoạn MN.

(ĐH Ngoại Thương, 1997).

LỜI GIẢI

Đường tròn (C) có tâm I(-1; 2), bán kính R = 3.

Trước hết, dễ thấy đường thẳng x = 2 là một tiếp tuyến cần tìm.

Phương trình đường thẳng qua A với hệ số góc k có dạng

$y = k(x - 2) + 5 \Leftrightarrow kx - y + 5 - 2k = 0\ (\Delta)$

Đường thẳng này là tiếp tuyến của đường tròn

$\Leftrightarrow d(I, \Delta) = k$

$$\Leftrightarrow \frac{|k(-1) - 2 + 5 - 2k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 3 \Leftrightarrow \frac{|3 - 3k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 3$$

$\Leftrightarrow (1 - k)^2 = k^2 + 1 \Leftrightarrow k = 0$

Vậy tiếp tuyến thứ hai là: y = 5

Dễ thấy toạ độ hai tiếp điểm là: M(2; 2), N(-1; 5)

Do đó: $MN = \sqrt{(-1-2)^2 + (5-2)^2} = 3\sqrt{2}$

Chú ý: Ta chia tiếp tuyến cần tìm thành hai loại:

- Tiếp tuyến song song với Oy: có phương trình dạng x = c
- Tiếp tuyến không song song với Oy: có phương trình dạng y = kx + b.

để đơn giản các tính toán.

VÍ DỤ 2.9

Cho đường tròn: $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$ và điểm M(2; 4)

a) Viết phương trình đường thẳng đi qua M và cắt đường tròn tại 2 điểm A, B sao cho M là trung điểm của đoạn AB.

b) Viết phương trình các tiếp tuyến của đường tròn có hệ số góc k = -1.

(ĐH TCKT Hà Nội, 1997)

LỜI GIẢI

a. Viết các phương trình đường tròn (C):

$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$$

(C) là đường tròn tâm I(1; 3), bán kính R = 2

Vì $P_{M/(C)} = 4 + 16 - 8 + 6 = -6 < 0$

$\Rightarrow$ M ở miền trong của (C)

Giả sử (d) là đường thẳng đi qua M(2; 4) và nhận $\overrightarrow{IM} = (1;1)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình:

$$1(x - 2) + 1(y - 4) = 0$$

$\Leftrightarrow x + y - 6 = 0$

b. Phương trình đường thẳng với hệ số góc k = -1 có dạng:

$$y = -x + m \quad \Leftrightarrow \quad x + y - m = 0 \quad (T)$$

(T) là tiếp tuyến của (c) $\Leftrightarrow d(I, (T)) = R$

$$\Leftrightarrow \frac{|1 + 3 - m|}{\sqrt{2}} = 2$$

$$\Leftrightarrow (4 - m)^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4 - 2\sqrt{2} \\ m = 4 + 2\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Vậy có hai tiếp tuyến cần tìm là:

$y = -x + 4 - 2\sqrt{2}$ và $y = -x + 4 + 2\sqrt{2}$

Chú ý: Cho hai đường tròn: (C_1) có tâm I_1, bán kính R_1

(C_2) có tâm I_2, bán kính R_2

Đường thẳng (Δ) là tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d(I_1, \Delta) = R_1 \\ d(I_2, \Delta) = R_2 \end{cases}$$

VÍ DỤ 2.10

Cho hai đường tròn:

$(C_1): x^2 + y^2 - 2x - 9y - 2 = 0$

$(C_2): x^2 + y^2 - 8x - 9y + 16 = 0$

a) CMR: Hai đường tròn (C_1) và (C_2) tiếp xúc với nhau.

b) Viết phương trình các tiếp tuyến chung của (C_1) và $(C_2$

(ĐH Tây Nguyên, 2000)

LỜI GIẢI

Viết lại phương trình hai đường tròn dưới dạng

$(C_1): (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$

$(C_2): (x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 1$

(C_1) có tâm $I_1(1; 1)$, bán kính $R_1 = 2$

(C_2) có tâm $I_2(4; 1)$, bán kính $R_2 = 1$

a. Ta có: $I_1I_2 = \sqrt{(4-1)^2 + (1-1)^2} = 3 = R_1 + R_2$

nên (C_1) tiếp xúc ngoài với (C_2). Dễ thấy toạ độ tiếp điểm là $T(3; 1)$

b. Tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2) tại $T(3; 1)$ có phương trình $(T_1): x = 3$

• Giả sử (Δ) là đường thẳng có hệ số góc a. Phương trình (Δ) có dạng : $y = ax + b \Leftrightarrow ax - y + b = 0$

(Δ) là tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d(I_1, \Delta) = R_1 \\ d(I_2, \Delta) = R_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|a - 1 + b|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 2 \\ \dfrac{|4a - 1 + b|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |a-1+b| = 2\sqrt{a^2+1} \\ |a-1+b| = 2|4a-1+b| \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |a-1+b| = 2\sqrt{a^2+1} \\ a-b+b = 2(4a-1+b) \end{cases} \\ \begin{cases} a-1+b = 2\sqrt{a^2+1} \\ a-1+b = -2(4a-1+b) \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |a-1+b| = 2\sqrt{a^2+1} \\ b = -7a+1 \end{cases} \\ \begin{cases} |a-1+b| = 2\sqrt{a^2+1} \\ b = -3a+1 \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^2 = \dfrac{1}{8} \\ b = -7a+1 \end{cases} \\ \begin{cases} 2a = 2\sqrt{a^2+1} \\ b = 1-3a \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \\ b = -\dfrac{7}{2\sqrt{2}}+1 \end{cases} \\ \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \\ b = \dfrac{7}{2\sqrt{2}}+1 \end{cases} \\ \begin{cases} 0a = 1 \\ b = 1-3a \end{cases} \quad \text{vô nghiệm} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \\ b = -\dfrac{7}{2\sqrt{2}}+1 \end{cases} \\ \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \\ b = \dfrac{7}{2\sqrt{2}}+1 \end{cases} \end{array} \right.$$

Do đó tìm được hai tiếp tuyến là:

$$(\Delta_1): \frac{1}{2\sqrt{2}}x - y - \frac{7}{2\sqrt{2}} + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 2\sqrt{2}\,y + 2\sqrt{2} - 7 = 0$$

$$(\Delta_2): \frac{1}{2\sqrt{2}}x + y - \frac{7}{2\sqrt{2}} - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + 2\sqrt{2}\,y - 2\sqrt{2} - 7 = 0$$

Tóm lại: Phương trình các tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2) là:

(T_1) : $x = 3$

(Δ_1) : $x - 2\sqrt{2}\,y + 2\sqrt{2} - 7 = 0$

(Δ_2) : $x + 2\sqrt{2}\,y - 2\sqrt{2} - 7 = 0$

Chú ý: Cho hai đường tròn: (C_1) có tâm I_1, bán kính R_1, (C_2) có tâm I_2, bán kính R_2. Đặt $d = I_1I_2$ ta có:

Hệ thức	Vị trí tương đối của (C_1) và (C_2)	Số tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2)
$d < \lvert R_1 - R_2 \rvert$	ở trong nhau	0
$d = \lvert R_1 - R_2 \rvert$	tiếp xúc trong	1
$\lvert R_1 - R_2 \rvert < R_1 + R_2$	cắt nhau	2
$d = R_1 + R_2$	tiếp xúc ngoài	3
$d > R_1 + R_2$	rời nhau	4

BÀI TẬP

1. Lập phương trình đường tròn đi qua các điểm A(-1; 1) và B(1; -3) và có tâm nằm trên đường thẳng $2x - y + 1 = 0$

2.Viết phương trình đường tròn tiếp xúc với Ox và cắt Oy tại điểm (0; 1). Tìm quỹ tích tâm của các đường tròn đó.

3. Lập phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác có ba đỉnh là A(1; 1), B(-1; 2), C(0; -1).

(ĐH Ngoại Thương, 1996)

4. Trong mặt phẳng cho ba điểm: A(-1; 7), B(4; -3), C(-4; 1). Hãy viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

(ĐH Ngoại ngữ, 2000)

5. Cho hai đường tròn:

$$(C_1) : x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$

$$(C_2) : x^2 + y^2 + 2x - 2y - 14 = 0$$

a) Xác định các giao điểm của (C_1) và (C_2).

b) Viết phương trình đường tròn đi qua hai giao điểm đó và A(0; 1)

6. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$ và A(3; 0).

Viết phương trình đường thẳng chứa dây cung của đường tròn qua A khi:

a) Dây cung có độ dài lớn nhất

b) Dây cung có độ dài nhỏ nhất

7. Trong hệ toạ độ trực chuẩn, cho các điểm A(8; 0), B(0; 6)

a) Viết phương trình đường tròn (C) ngoại tiếp ΔOAB.

b) Viết phương trình các tiếp tuyến với đường tròn (C) và qua S(14; 8).

c) Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác OAB.

8. a) Cho điểm A(3; 2) và đường tròn (C):

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$$

Viết phương trình với những tiếp tuyến với (C) vẽ từ A và tìm toạ độ các điểm.

b) Lập phương trình đường tròn tâm I(4; 3) và tiếp xúc với đường thẳng (d) : $x + 2y - 5 = 0$.

9. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$

Viết phương trình tiếp tuyến với (C) có hệ số góc là -2.

10. Cho phương trình các đường tròn:

$(C) : x^2 + y^2 - 1 = 0$

$(C_m): x^2 + y^2 - 2(m + 1)x + 4my - 5 = 0$

a) Chứng minh rằng có hai đường tròn thuộc họ (C_m) tiếp xúc với (C).

b) Viết phương trình các tiếp tuyến chung của hai đường tròn vừa tìm được ở câu a.

11. Trên mặt phẳng Oxy cho họ đường cong (C_m).

$(C_m): x^2 + y^2 - 2x - 2y + m = 0$ (m là tham số)

a) Với điều kiện nào của m thì (C_m) là đường tròn. Xác định tâm và bán kính của (C_m) trong trường hợp này.

b) Tìm m để (C_m) là đường tròn có bán kính bằng 1. Gọi đường tròn này là (C). Viết phương trình đường thẳng (d) tiếp xúc với đường tròn (C) tại điểm:

$$A\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

c) Viết phương trình tất cả các tiếp tuyến với đường tròn (C) biết chúng vuông góc với đường thẳng (d).

(CĐ Kinh tế đối ngoại, 1999)

12. Cho hai đường tròn:

$(C_1) : x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$

$(C_2) : x^2 + y^2 - 10x - 6y + 30 = 0$

có tâm lần lượt là I và J

a) Chứng minh (C_1) tiếp xúc ngoài với (C_2) và tìm toạ độ tiếp điểm H.

b) Gọi (D) là một tiếp tuyến chung không đi qua H của (C_1) và (C_2). Tìm toạ độ giao điểm K của (D) và đường thẳng IJ.

Viết phương trình đường tròn (C) đi qua K và tiếp xúc với hai đường tròn (C_1) và (C_2) tại H.

(ĐHQG TPHCM, 1999)

§3. CÁC ĐƯỜNG CÔNIC

1. ELip

- $E = \{M / MF_1 + MF_2 = 2a > 2c = F_1F_2\}$

Hai điểm F_1, F_2 gọi là tiêu điểm của elip.

- Nếu chọn hệ trục toạ độ Oxy sao cho $F_1(-c; o)$, $F_2(c; o)$ thì elip có phương trình chính tắc:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{, trong đó } b^2 = a^2 - c^2 \quad (a > b)$$

- Elip có 4 đỉnh: $A_1 = (-a; o)$, $A_2 = (a; o)$, $B_1 = (o; -b)$, $B_2 = (o; b)$. Độ dài 2a gọi là trục lớn, độ dài 2b gọi là trục bé.

- Tâm sai $e = \dfrac{c}{a} \quad (0 < e < 1)$

- Phương trình đường chuẩn: $x = \pm \dfrac{a}{e}$

- Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ thuộc elip là:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

- Đường thẳng $Ax + By + C = 0$ tiếp xúc với elip:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ khi và chỉ khi } a^2A^2 + bB^2 = C^2.$$

VÍ DỤ 3.1

a) Viết phương trình chính tắc của elip (E) có tiêu cự $2c = 8$*, tâm sai* $e = \frac{4}{5}$ *và các tiêu điểm nằm trên trục Ox.*

b) Viết phương trình các tiếp tuyến với elip (E) xuất phát từ điểm $A(0;\ \frac{45}{12})$*.*

LỜI GIẢI

a. Phương trình chính tắc của elip có dạng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Ta có: $\left.\begin{array}{l} 2c = 8 \Rightarrow c = 4 \\ e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow a = 5$

$b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow b = 3$

Vậy phương trình chính tắc của elip (E): $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

b. Phương trình đường thẳng đi qua điểm $A\left(0; \frac{45}{12}\right)$ có dạng:

$$A(x - 0) + B\left(y - \frac{45}{12}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Ax + By - \frac{15}{4} = 0$$

Đường thẳng này là tiếp tuyến của elip

$\Leftrightarrow 25A^2 + 9B^2 = \left(-\frac{45}{12}B\right)^2 \Leftrightarrow 3600A^2 = 121B^2$

Chọn $A = 9 \quad \Rightarrow \quad B = \pm 20$

Vậy hai đường tiếp tuyến cần tìm là

(T_1): $9x + 20y - 75 = 0$

(T_2): $9x - 20y + 75 = 0$

VÍ DỤ 3.2

CMR tích các khoảng cách từ các tiêu điểm tới một tiếp tuyến bất kỳ của một elip bằng bình phương độ dài nửa trục nhỏ của elip.

LỜI GIẢI

Giả sử elip có phương trình:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (0 < b < a)$$

Khi đó tiếp tuyến tại điểm (x_0, y_0) của elip có phương trình

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad b^2 x_0 x + a^2 y_0 y - a^2 b^2 = 0$$

Khoảng cách từ các tiêu điểm $F_1(-c;\ 0)$, $F_2(c;\ 0)$ đến tiếp điểm lần lượt là:

$$d_1 = \frac{\left|-b^2 x_0 c - a^2 b^2\right|}{\sqrt{b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2}}, \qquad d_2 = \frac{\left|b^2 x_0 c - a^2 b^2\right|}{\sqrt{b^4 x_0^2 + a^4 b^2}}$$

Do đó tích các khoảng cách là:

$$d_1 . d_2 = \frac{\left|a^4 b^4 - b^4 x_0^2 c^2\right|}{b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2} = \frac{b^4 \left|a^4 - x_0^2 (a^2 - b^2)\right|}{b^4 x_0^2 + a^2 (a^2 b^2 - b^2 x_0^2)}$$

$$= \frac{b^4 \left(a^4 - x_0^2 (a^2 - b^2)\right)}{b^2 (a^4 + b^2 x_0^2 - a^2 x_0^2)} = b^2 \qquad \text{(đpcm)}$$

VÍ DỤ 3.3

Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Đêcac vuông góc Oxy, cho elip

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1 \qquad \text{với } a > b > 0.$$

a) Gọi E là điểm tuỳ ý thuộc elip, chứng tỏ rằng b ≤ OE ≤ a.

b) A, B là hai điểm thuộc elip sao cho OA trên elip để tam giác OAB có diện tích lớn nhất, nhỏ nhất. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất đó.

LỜI GIẢI

a. Giả sử $E(x_0; y_0) \in$ elip, ta có: $OE^2 = x_0^2 + y_0^2$. Vì $b^2 < a^2$ nên:

$$b^2 = b^2\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}\right) \le OE^2 = a^2.\frac{x_0^2}{a^2} + b^2.\frac{y_0^2}{b^2} \le a^2\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}\right) = a^2$$

Do đó $\quad b \le OE \le a$

b. Giả sử phương trình đường thẳng OA là $y = kx$ $(k \neq 0)$. Khi đó phương trình đường thẳng OB là $y = -\frac{1}{k}x$

Diện tích ΔOAB là: $\quad S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}OA.\,OB$

Ta có:

$$OA^2 = x_0^2 + y_0^2 = \frac{a^2b^2\left(1+k^2\right)}{b^2 + k^2a^2}$$

$$OB^2 = x_B^2 + y_B^2 = \frac{a^2b^2\left(1+k^2\right)}{a^2 + k^2b^2}$$

Do đó:

$$\frac{1}{OA^2}.\frac{1}{OB^2} = \frac{1}{a^2b^2} + \frac{k^2}{\left(1+k^2\right)^2}.\frac{\left(a^2-b^2\right)^2}{a^4b^4}$$

Vì: $0 \le \frac{k^2}{\left(1+k^2\right)^2} \le \frac{1}{4}$ nên

$$\frac{1}{a^2b^2} \le \frac{1}{OA^2}.\frac{1}{OB^2} \le \left(\frac{a^2+b^2}{2a^2b^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}ab \geq \frac{1}{2}OA.OB \geq \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

Do đó:

$\max S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}ab$, đạt được khi A, B là các đỉnh tương ứng trên trục lớn và trục nhỏ của elip.

$\min S_{\Delta OAB} = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$, đạt được khi A, B lần lượt là giao của hai đường phân giác thứ nhất, thứ hai với elip.

VÍ DỤ 3.4

Cho elip có phương trình (E): $\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{12} = 1$

Xét hình vuông ngoại tiếp elip (tức là các cạnh hình vuông tiếp xúc với elip). Viết phương trình các đường thẳng chứa các cạnh hình vuông đó.

LỜI GIẢI

Gọi (Δ_1): $Ax + By + C_1 = 0$ và (Δ_2): $Bx - Ay + C_2 = 0$ là phương trình các cặp cạnh hình vuông liên tiếp (vuông góc) nhau. Khi đó:

$$(\Delta_1) \text{ và } (\Delta_2) \text{ tiếp xúc } (E) \Leftrightarrow \begin{cases} 24A^2 + 12B^2 = C_1^2 \\ 24B^2 + 12A^2 = C_2^2 \end{cases}$$

Để ý rằng tâm O của elip cũng có tâm đối xứng của hình vuông ngoại tiếp, do đó ta có:

$$d(O, \Delta_1) = d(O, \Delta_2) \Leftrightarrow \frac{|C_1|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|C_2|}{\sqrt{B^2+A^2}}$$

$$\Leftrightarrow |C_1| = |C_2| \Leftrightarrow 24A^2 + 12B^2 = 24B^2 + 12A^2$$

$$\Leftrightarrow A^2 = B^2$$

Chọn A = 1 thì B = ±1, $C_1 = \pm 6$, $C_2 = \pm 6$.

Vậy phương trình các đường thẳng chứa các cạnh hình vuông ngoại tiếp hình elip là:

$(\Delta_1) : x +-y + 6 = 0$; $(\Delta'_1) : x + y - 6 = 0$

$(\Delta_2) : x - y + 6 = 0$; $(\Delta'_2) : x - y - 6 = 0$

VÍ DỤ 3.5*

Cho elip (E): $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *(a>0, b>0) và điểm* $M(x_0; y_0) \in (E)$ *với* $-a < x_0 < a$. *Tiếp tuyến tại M cắt hai tiếp tuyến tại A(-a; 0) và A'(a; 0) lần lượt tại T và T'.*

a) Chứng minh tích số P = AT . A'T' không phụ thuộc vị trí M.

b) Tìm các điểm M ∈ (E) sao cho tứ giác ATT'A' có diện tích nhỏ nhất và tính diện tích đó.

c) Gọi N(x; y) là giao điểm của AT' và A'T. Tìm quỹ tích các giao điểm N khi M chạy trên (E).

LỜI GIẢI

a. Tiếp tuyến tại $M(x_0; y_0)$ có dạng: $\dfrac{x_0 x}{a^2} + \dfrac{y_0 y}{b^2} = 1$ (1).

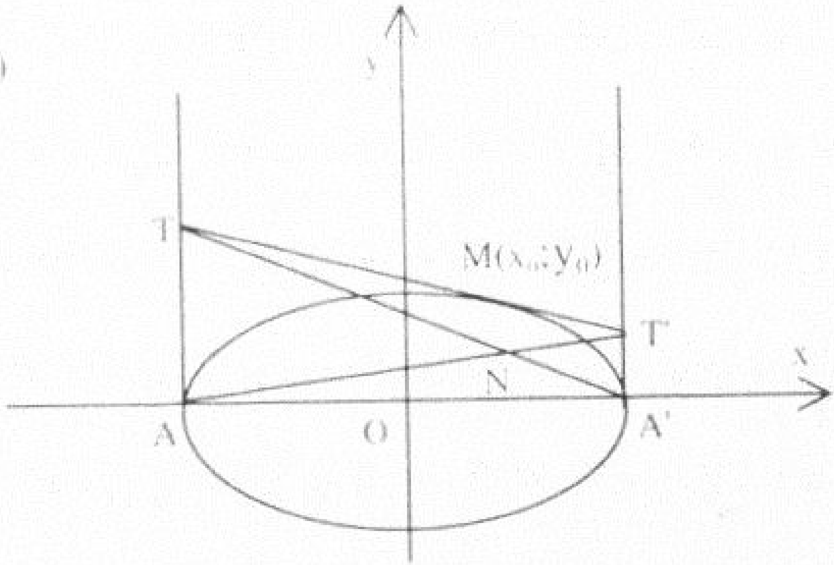
Vì các điểm $T(-a; y_1)$ và $T'(a; y_2)$ nằm trên tiếp tuyến nên toạ độ của chúng thoả mãn (1), tức là:

$$\begin{cases} \dfrac{-ax_0}{a^2} + \dfrac{y_1 y_0}{b^2} = 1 \\ \dfrac{ax_0}{a^2} + \dfrac{y_0 y_2}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \dfrac{b^2}{y_0}\left(1 + \dfrac{x_0}{a}\right) \\ y_2 = \dfrac{b^2}{y_0}\left(1 - \dfrac{x_0}{a}\right) \end{cases}$$

Do đó:

$$P = AT.A'T' = |y_1|.|y_2| = \frac{b^4}{y_0^2}\left(1 - \frac{x_0^2}{a^2}\right) = \frac{b^4}{y_0^2}.\frac{y_0^2}{b^2} = b^2 = \text{const}$$

(vì $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$)



b. Diện tích hình thang vuông ATA'T' là:

$$S=\frac{1}{2}\left(AT+A'T'\right)AA'=a\left(AT+A'T'\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$S=a\left(AT+A'T'\right)\geq 2a\sqrt{AT.A'T'}=2a\sqrt{b^2}=2ab$$

Dấu bằng xảy ra ⇔ AT = A'T' = b

Do đó min S = 2ab, đạt được khi M ≡ B'(0; b) hoặc M ≡ B(0; -b).

c. Đường thẳng qua A'(a; 0) và T(-a; y_1) có phương trình:

$$\frac{x-a}{-a-a}=\frac{y-0}{y_1-0}\quad\Leftrightarrow\quad -2ay=y_1\left(x-a\right)$$

Do (2) ta có: A'T: $-2a^2y_0y = b^2(a + x_0)(x - a)$

Tương tự phương trình đường thẳng AT' là:

AT' : $2a^2y_0y = b^2(a - x_0)(x + a)$

Toạ độ giao điểm N = A'T ∩ AT' là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} -2a^2y_0y = b^2(a+x_0)(x-a) \\ 2a^2y_0y = b^2(a-x_0)(x+a) \end{cases}$$

Cộng hai phương trình này ta được:

$(a + x_0)(x - a) + (a - x_0)(x + a) = 0 \Leftrightarrow x = x_0$

Thay $x = x_0$ vào (5) ta được: $y = \dfrac{b^2}{2a^2y_0}\left(a^2 - x_0^2\right) = \dfrac{y_0}{2}$

Do đó:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

Vậy khi M chạy trên elip, thì N(x; y) vẽ nên elip có phương trình: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2} = 1$

Elip này có tâm O, các bán trục là a và $\dfrac{b}{2}$

2. Hypebol

- Hypebol là tập hợp những điểm M sao cho $|MF_1 - MF_2| = 2a$ trong đó đoạn thẳng $F_1F_2 = 2c$ cố định, $a < c$.

Hai điểm F_1 và F_2 gọi là tiêu điểm của hypebol

- Nếu chọn hệ trục toạ độ Oxy sao cho $F_1(-c; 0)$ $F_2(c; 0)$ thì hypebol có phương trình chính tắc:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{trong đó} \quad b^2 = c^2 - a^2$$

Hypebol có hai đỉnh $A_1 = (-a; 0)$, $A_2 = (a; 0)$ và hai đường tiệm cận: $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 1$

- Tâm sai $e = \frac{c}{a} \quad (e > 1)$

- Phương trình hai đường chuẩn $x = \pm\frac{a}{e}$

- Phương trình tiếp tuyến của hypebol tại điểm $M_0(x_0; y_0)$

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

- Đường thẳng $Ax + By + C = 0$ tiếp xúc với hypebol $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ khi và chỉ khi $a^2A^2 - b^2B = C^2 \neq 0$

VÍ DỤ 3.6

Lập phương trình chính tắc của hypebol với Ox là trục thực hai bán trục a = b = 7, phương trình hai tiệm cận $y = \pm\frac{3}{4}x$

a) Tính độ dài các bán trục, vẽ hypebol.

b) Lập phương trình tiếp tuyến của hypebol song song với đường thẳng có phương trình (d): 5x - 4y + 10 = 0.

LỜI GIẢI

a. Phương trình hypebol có dạng: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Từ giả thiết ta có hệ:

$$\begin{cases} a = b = 7 \\ \frac{b}{a} = \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases}$$

Phương trình hypebol cần tìm là:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

b. Đường thẳng song song với (d) có phương trình dạng:

$$5x - 4y + m = 0$$

Đường thẳng này tiếp xúc với hypebol

$\Leftrightarrow 16.25 - 9.16 = 16m^2 \neq 0 \Leftrightarrow m = \pm 4$

Vậy hypebol có hai tiếp tuyến song song với (d), đó là:

$5x - 4y + 4 = 0$; $5x - 4y - 4 = 0$

VÍ DỤ 3.7

Cho $F_1(-3; 2)$; $F_2(3; 2)$. Viết phương trình hypebol (H) có tâm sai $e = 2$ và F_1, F_2 là tiêu điểm.

LỜI GIẢI

Dùng phép biến đổi toạ độ $\begin{cases} X = x + 1 \\ Y = y - 2 \end{cases}$

Khi đó gốc toạ độ mới I là trung điểm của F_1F_2 và $F_1F_2 \in IX$

Ta có:

$$c = \frac{F_1F_2}{2} = \frac{3+5}{2} = 4 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{c}{e} = 2$$

Từ đó: $b^2 = c^2 - a^2 = 4^2 - 2^2 = 12$

Phương trình hypebol (H) trong hệ trục IXY là:

$$\frac{X^2}{4} - \frac{Y^2}{2} = 1$$

Do đó phương trình của hypebol (H) trong hệ trục Oxy là:

$$\frac{(x+1)^2}{4}-\frac{(y-2)^2}{12}=1$$

Chú ý: Nếu hypebol có:

- Tâm đối xứng $I(x_0; y_0)$
- Trục thực 2a nằm ngang
- Trục ảo 2b thẳng đứng

thì bằng cách đổi hệ trục toạ độ, ta được phương trình của hypebol là:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

VÍ DỤ 3.8

Với mỗi t mà $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$, *xét M(t) có toạ độ:*

$$\left(x=\frac{1}{\cos t}, \qquad y=\sqrt{3}\,\mathrm{tg}t\right)$$

Chứng minh:

a) Khi t thay đổi, điểm M(t) vạch nên một nhánh của hypebol. Xác định toạ độ các tiêu điểm của hypebol đó.

b) Chứng minh điều kiện cần và đủ để đường thẳng nối hai điểm phân biệt $M(t_1)$, $M(t_2)$ *đi qua 1 tiêu điểm của (H) là:*

$$\mathrm{tg}\frac{t_1}{2}.\mathrm{tg}\frac{t_2}{2}=-\frac{1}{3}$$

LỜI GIẢI

a. Ta có:

$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{\cos t}\\ y=\sqrt{3}\,\mathrm{tg}t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2=1+\mathrm{tg}^2t\\ y^2=3\mathrm{tg}^2t\end{cases}\Rightarrow x^2=1+\frac{y^2}{3}$$

$$\Rightarrow\ x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$$

Do $t \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ nên $x = \frac{1}{\cos t} > 0$

Vậy M vạch nên nhánh bên phải của hypebol

$$x^2 - \frac{y^2}{3} = 1 \qquad (x > 0)$$

Ta có: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1 + 3} = 2$ Vậy các tiêu điểm của hypebol là F'(-2; 0), F(2; 0).

b. Đặt $u = \operatorname{tg}\frac{t_1}{2}$; $v = \operatorname{tg}\frac{t_2}{2}$ (do $t_1 \neq t_2 \Rightarrow u_1 \neq u_2$)

Ta có:

$$M(t_1): \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\cos t_1} = \dfrac{1+u^2}{1-u^2} \\ y_1 = \sqrt{3}\operatorname{tg} t_1 = \dfrac{2\sqrt{3}u}{1-u^2} \end{cases} ; \quad M(t_2): \begin{cases} x_2 = \dfrac{1}{\cos t_2} = \dfrac{1+v^2}{1-v^2} \\ y_2 = \sqrt{3}\operatorname{tg} t_2 = \dfrac{2\sqrt{3}v}{1-v^2} \end{cases}$$

Phương trình đường thẳng $M(t_1)M(t_2)$:

$$\frac{y - \dfrac{2\sqrt{3}u}{1-u^2}}{\dfrac{2\sqrt{3}v}{1-v^2} - \dfrac{2\sqrt{3}u}{1-u^2}} = \frac{x - \dfrac{1+u^2}{1-u^2}}{\dfrac{1+v^2}{1-v^2} - \dfrac{1+u^2}{1-u^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-u^2)u - 2\sqrt{3}u}{2\sqrt{3}v(1-u^2) - 2\sqrt{3}u(1-v^2)} = \frac{(1-u^2)x - 1 - u^2}{(1+v^2)(1-u^2) - (1+u^2)(1-v^2)}$$

Tiêu điểm $F_2(2; 0) \in M(t_1)\,M(t_2)$

$$\Leftrightarrow \frac{-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\left[v(1-u^2) - u(1-v^2)\right]} = \frac{(1-u^2)2 - 1 - u^2}{2(v^2 - u^2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-u}{(v-u)(1-uv)} = \frac{1-3u^2}{2(v^2-u^2)}$$

$$\Leftrightarrow -2u(v+u) = (1-3u^2)(1+uv)$$

$$\Leftrightarrow 3u^2v - 3uv = 1 - u^2 \quad \Leftrightarrow (3uv+1)(u^2-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow uv = -\frac{1}{3} \text{ (vì } u^2 - 1 \neq 0) \quad \Leftrightarrow \text{tg}\frac{t_1}{2}\text{tg}\frac{t_2}{2} = -\frac{1}{2} \text{ (dpcm)}$$

VÍ DỤ 3.9

Cho hypebol (H) : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

a) Tính độ dài phần đường tiệm cận chắn bởi hai đường chuẩn.

b) Tìm khoảng cách từ tiêu điểm tới các đường tiệm cận

c) Chứng minh rằng chân các đường vuông góc hạ từ một tiêu điểm tới các đường tiệm cận nằm trên đường chuẩn ứng với tiêu điểm đó.

LỜI GIẢI

a (H) có hai tiêu điểm:

$F_1(-c; 0)$; $F_2(c; 0)$; với $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

Hai đường chuẩn của hypebol (H) là $x = \pm\frac{a}{e} = \pm\frac{a^2}{c}$

Dễ thấy đường tiệm cận bx - ay = 0 cắt các đường chuẩn tại các điểm có toạ độ $\left(\pm\frac{a}{e};\ \pm\frac{b}{c}\right)$

Khoảng cách giữa hai điểm đó là:

$$d = \sqrt{\frac{4a^2 + 4b^2}{e^2}} = 2\sqrt{\frac{(a^2 + b^2)a^2}{c^2}} = 2a \quad (\text{vì } c^2 = a^2 + b^2)$$

b. Khoảng cách từ tiêu điểm $F_2(c;\ 0)$ tới đường tiệm cận $bx \pm ay = 0$ là: $\dfrac{|bc|}{\sqrt{b^2 + a^2}} = \dfrac{bc}{c} = b$

c. Gọi I là chân đường vuông góc hạ từ $F_2(c;\ 0)$ tới đường tiệm cận $bx + ay = 0$. Khi đó dễ tìm được I có tọa độ $\left(x_0;\ -\dfrac{bx_0}{a}\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{IF_2} = \left(c - x_0;\ \dfrac{bx_0}{a}\right)$, vectơ chỉ phương của đường tiệm cận $bx + ay = 0$ là $\vec{u} = -a;\ b)$.

Ta phải có: $\vec{u}\ .\ \overrightarrow{IF_2} = 0 \ \Leftrightarrow\ -a(x - x_0) + \dfrac{b^2x_0}{a} = 0$

$$\Rightarrow (b^2 + a^2)x_0 = a^2c \Rightarrow x_0 = \frac{a}{e}$$

Vậy điểm I nằm trên đường chuẩn tương ứng với tiêu điểm F_2.

VÍ DỤ 3.10

Cho hypebol (H): $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Tìm tập hợp các điểm trong mặt phẳng tọa độ Oxy sao cho từ mỗi điểm đó kẻ được hai tiếp tuyến với (H) và hai tiếp tuyến ấy vuông góc với nhau.

LỜI GIẢI

Giả sử điểm cần tìm là $M(x_0;\ y_0)$. Phương trình hai đường thẳng vuông góc với nhau và đi qua $M(x_0;\ y_0)$ là:

Δ_1): $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow Ax + By - (Ax_0 + By_0) = 0\ (\Delta_1)$

$B(x - x_0) + A(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow Bx - Ay - (Bx_0 - Ay_0) = 0\ (\Delta_2)$

Δ_1) là tiếp tuyến của (H) $\Leftrightarrow \begin{cases} Ax_0 + By_0 \neq 0 \\ a^2A^2 - b^2B^2 = [-(Ax_0 + By_0)]^2 \end{cases}$

Δ_2) là tiếp tuyến của (H) $\Leftrightarrow \begin{cases} Ay_0 - Bx_0 \neq 0 \\ a^2B^2 - b^2A^2 = (-Bx_0 + Ay_0)^2 \end{cases}$

Cộng hai đẳng thức này, ta nhận được:

$$a^2(A^2 + B^2) - b^2(A^2 + B^2) = (A^2 + B^2)\left(x_0^2 + y_0^2\right)$$

$$\Rightarrow x_0^2 + y_0^2 = a^2 - b^2, \text{ với } \begin{cases} Ax_0 + By_0 \neq 0 \\ Ay_0 - Bx_0 \neq 0 \end{cases}$$

Vậy quỹ tích các điểm cần tìm là đường tròn tâm O, bán kính $R = \sqrt{a^2 - b^2}$, trừ 4 giao điểm của đường tròn và 2 đường tiệm cận của hypebol

3. Parabol

• Parabol $P = \{M \mid d(M, \Delta) = MF\}$

F gọi là tiêu điểm của parabol, d gọi là đường chuẩn.

Kẻ FP ⊥ d, chọn hệ trục Oxy sao cho $F\left(\frac{P}{2}; 0\right)$, $P\left(-\frac{P}{2}; 0\right)$, trong đó p = FP, thì parabol có phương trình chính tắc:

$$y^2 = 2px$$

• Tiếp tuyến của parabol tại điểm $M_0(x_0; y_0)$ thuộc parabol là: $y_0y = p(x_0 + x)$

• Đường thẳng $Ax + By + C = 0$ tiếp xúc với parabol $y^2 = 2px$ khi và chỉ khi $pB^2 = 2AC$

VÍ DỤ 3.11

Cho F(3; 0) và đường thẳng (d) : 3x - 4y + 16 = 0. Viết phương trình parabol (P) có tiêu điểm F và đỉnh là gốc toạ độ 0. Chứng minh rằng (P) tiếp xúc với (d). Tìm toạ độ tiếp điểm.

LỜI GIẢI

Phương trình (P) có dạng : $y^2 = 2px$

Ta có: $\frac{p}{2} = 3 \Rightarrow p = 6$

Vậy phương trình parabol (P): $y^2 = 12x$

Ta có: $6(-4)^2 = 2.3.16 \Rightarrow$ (d) tiếp xúc với (P). Tọa độ tiếp điểm là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 3x - 4y + 16 = 0 \\ y^2 = 12x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3y-16}{4} \\ y^2 = 12\left(\dfrac{3y-16}{3}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3y-16}{4} \\ (y-8)^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{16}{3} \\ y = 8 \end{cases}$$

Vậy (d) tiếp xúc với (P) tại điểm $\left(\frac{16}{3};\ 8\right)$

VÍ DỤ 3.12

Cho Parabol $y^2 = 4x$

a. Chứng minh rằng từ điểm N tùy ý thuộc đường chuẩn của parabol có thể kẻ được hai tiếp tuyến đến parabol mà hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau.

b. Gọi T_1, T_2 lần lượt là hai tiếp tuyến của hai tiếp tuyến nói ở trên. Chứng minh rằng đường thẳng T_1T_2 luôn đi qua một điểm cố định khi N chạy trên đường chuẩn của parabol.

c. Cho M là một điểm tuỳ ý thuộc parabol (M khác đỉnh của parabol). Tiếp tuyến tại M của parabol cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A, B. Tìm quỹ tích trung điểm I của AB khi M chạy trên parabol đã cho.

LỜI GIẢI

a. Parabol có tham số p = 2, ở nửa mặt phẳng phải. Đường chuẩn là x = -1. Tọa độ của điểm N có dạng (-1, m).

Phương trình đường thẳng qua N có dạng:

$y = k(x + 1) + m \Leftrightarrow kx - y + k + m = 0$

Đường này là tiếp tuyến của parabol $\Leftrightarrow 2.(-1)^2 = 2k.(k + m)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ k^2 + km - 1 = 0 \qquad (*) \end{cases}$$

Vì c . a = -1 nên phương trình (*) luôn có hai nghiệm k_1, k_2 với $k_1k_2 = -1$, do đó từ N kẻ được hai tiếp tuyến đến parabol và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau.

b. Tọa độ các tiếp tuyến T_1, T_2 là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = kx + k + m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (kx + k + m)^2 = 4x \\ y = kx + k + m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k^2x^2 + 2(k^2 + km - 2)x + (k + m)^2 = 0 \\ y = kx + k + m \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x_1 = -\dfrac{k_1(k_1+m)-2}{k_1} = \dfrac{1}{k_1^2} \\ y_1 = k_1x_1 + k_1 + m \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = -\dfrac{k_2(k_2+m)-2}{k_2} = \dfrac{1}{k_2^2} \\ y_2 = k_2x_2 + k_2 + m \end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{k_1^2} \\ y_1 = \dfrac{2}{k_1} \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = \dfrac{1}{k_2^2} \\ y_2 = \dfrac{2}{k_2} \end{cases}\end{array}\right.$$

Do đó phương trình đường thẳng T_1T_2 là:

$$2x + (k_1 - k_2)y - 2 = 0$$

Dễ thấy đường thẳng T_1T_2 luôn đi qua điểm cố định (1; 0).

c. Xét điểm $M\left(\dfrac{m^2}{4}; m\right)$ ở trên parabol $y^2 = 4x$. Phương trình tiếp tuyến của parabol tại M là:

$$y \cdot m + 2\left(x + \frac{m^2}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow 4x + 2my + m^2 = 0$$

Tọa độ giao điểm của tiếp tuyến này với Ox, Oy lần lượt là $A\left(-\dfrac{m^2}{4}; 0\right)$, $B\left(0; -\dfrac{m}{2}\right)$.

Suy ra tọa độ trung điểm I của AB:

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} = -\dfrac{m^2}{8} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} = -\dfrac{m}{4} \end{cases}$$

Khử m từ hệ trên ta được: $x_I = -2y_I^2$.

Vậy quỹ tích của I là parabol có phương trình $x = -2y^2$.

VÍ DỤ 3.13

Cho hai đường parabol có phương trình

$y^2 = 2px$ *(1)*

$y = ax^2 + bx + c,\quad a \neq 0$ *(2)*

Chứng minh rằng nếu hai parabol đó cắt nhau tại bốn điểm thì bốn điểm đó nằm trên một đường tròn.

LỜI GIẢI

Các giao điểm của hai parabol (1) và (2) có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y^2 = 2px \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$$

Ta biến đổi hệ phương trình nói trên thành các hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases} y^2 = 2px \\ \dfrac{y}{a} = x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 2px \\ y^2 - \dfrac{y}{a} = 2px - x^2 - \dfrac{b}{a}x - \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 2px & (1) \\ x^2 + y^2 + \dfrac{b-2pa}{a}x - \dfrac{y}{a} + \dfrac{c}{a} = 0 & (3) \end{cases}$$

Phương trình (3) cho ta một đường tròn mà giao điểm của nó với parabol (1) cũng là giao điểm của hai parabol (1) và (2).

Vậy bốn giao điểm của parabol (1) và (2) nằm trên đường tròn có phương trình (3).

4. Khảo sát chung về các đường cônic:

Cho một điểm F và một đường thẳng (Δ) không đi qua F.

$$\text{Cônic} = \left\{ M \;\middle|\; \frac{MF}{d(M,\Delta)} = e \text{ không đổi} \right\}$$

e gọi là tâm sai, F là tiêu điểm, Δ là đường chuẩn ứng với tiêu điểm F. Ngoài ra:

Nếu e < 1, cônic là đường elip

e = 1, cônic là đường parabol

e > 1, cônic là đường hypebol

VÍ DỤ 3.14

Viết phương trình đường cônic có đường chuẩn là đường thẳng $x - y - 1 = 0$, tiêu điểm $F(0; 1)$ và tâm sai $e = 2$.

LỜI GIẢI

$$M(x; y) \in \text{cônic} \Leftrightarrow \frac{MF}{d(M, \Delta)} = e = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}}{\dfrac{|x-y-1|}{\sqrt{2}}} = 2 \qquad \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{2}\,|x-y-1|$$

$\Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 2(x - y - 1)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 = 2(x^2 + y^2 + 1 - 2xy + 2y - 2x)$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4xy + 6y - 4x + 1 = 0$

Đó là phương trình cần tìm của cônic. Vì tâm sai $e = 2 > 1$ nên cônic này là hypebol.

VÍ DỤ 3.15

Cho họ đường cong (C_m) có phương trình:

$(m^2 - 4)x^2 - 4y^2 - 4(m^2 - 4) = 0$

a. Tùy theo giáo trị của m hãy khảo sát bản chất của họ đường cong (C_m) và xác định rõ các phần tử căn bản trong mỗi trường hợp.

b. Vẽ các đường cong (C_0) và $\left(C_{2\sqrt{2}}\right)$.

LỜI GIẢI

a. *) Nếu $m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$ thì $(C_{\pm 2})$ là trục hoành: $y = 0$

*) Nếu $m^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$ thì

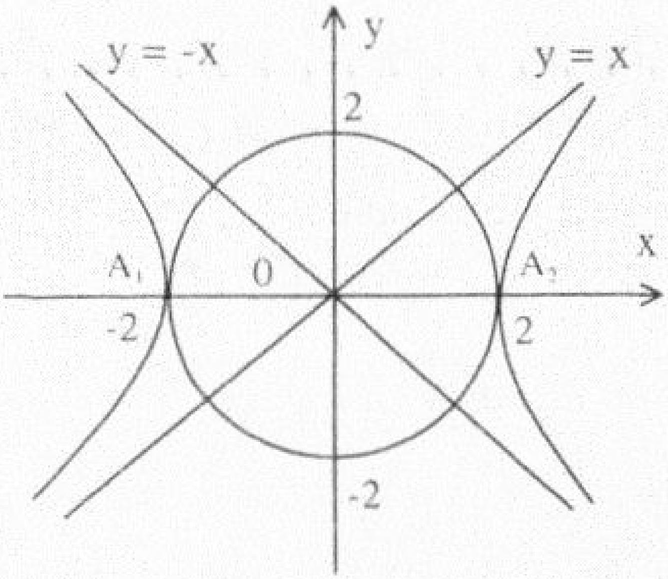
$(m^2 - 4)x^2 - 4y^2 = 4(m^2 - 4)$

$\Leftrightarrow x^2 - \dfrac{4}{m^2 - 4}y^2 = 4$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{m^2 - 4} = 1$

Từ (1) ta có:

+ Nếu $m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow$ |



hypebol có:

- Tâm O

- Trục thực là trục Ox,

$a = 2$

- Trục ảo là trục Oy, $b = \sqrt{m^2 - 4^2}$

- Nửa tiêu cự $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{m^2} = |m|$

- Các đỉnh $A_1(-2; 0)$, $A_2(2; 0)$
- Tiêu điểm: $F_1(-m; 0)$, $F_2(m; 0)$

- Hai đường tiệm cận: $y = \pm\frac{b}{a}x = \pm\frac{\sqrt{m^2 - 4}}{2}x$

+ Nếu $m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$ thì (1) là phương trình của elip có:

- Tâm O (0; 0)
- Trục chứa tiêu điểm là Ox, $a = 2$
- Trục bé nằm trên Oy, $b = \sqrt{4 - m^2}$
- Các đỉnh $A_1(-2; 0)$, $A_2(2; 0)$, $B_1(0; -\sqrt{4 - m^2})$, $B_2(0; \sqrt{4 - m^2})$

b. Vẽ (C_0) và $(C_{2\sqrt{2}})$

- (C_0): $x^2 + y^2 = 1$

  (C_0) là đường tròn tâm O(0; 0), bán kính R = 2
- $(C_{2\sqrt{2}})$: $4x^2 - 4y^2 = 46 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 4$

$(C_{2\sqrt{2}})$ là hypebol tâm O (0; 0), có hai đường tiệm cận là $y = \pm x$ và hai đỉnh $A_1(-2; 0)$, $A_2(2; 0)$.

VÍ DỤ 3.16

Tìm điều kiện của a, b, c, d để tại mọi giao điểm của chúng, elip $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{d^2} = 1$ *trực giao với nhau.*

LỜI GIẢI

Giả sử (x_0, y_0) là điểm chung của elip và hypebol phương trình tiếp tuyến của elip tại $M_0(x_0, y_0)$ là: $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$.

Phương trình tiếp tuyến của hypebol tại $M_0(x_0, y_0)$ là:

$$\frac{x_0x}{c^2} + \frac{y_0y}{d^2} = 1$$

Hai tiếp tuyến này vuông góc với nhau ⇔

$$\Leftrightarrow \frac{x_0}{a^2}.\frac{x_0}{c^2} - \frac{y_0}{b^2}.\frac{y_0}{d^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2} = \frac{y_0c^2}{b^2d^2} \qquad \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{c^2} = \frac{y_0^2a^2}{b^2d^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = \frac{y_0^2c^2}{b^2d^2} + \frac{y_0^2}{b^2} \\ 1 = \frac{x_0^2}{c^2} + \frac{y_0^2}{d^2} = \frac{y_0^2a^2}{b^2d^2} + \frac{y_0^2}{d^2} \end{cases} \Rightarrow a^2 - b^2 = c^2 + d^2$$

BÀI TẬP

1. Cho hypebol $x^2 - y^2 = 8$. Viết phương trình chính tắc của elip đi qua điểm A(4; 6) và có tiêu điểm trùng với tiêu điểm của hypebol đã cho.

2. Cho elip (E): $4x^2 + 16y^2 = 64$

a) Xác định các tiêu điểm F_1, F_2, tâm sai và vẽ elip.

b) M là một điểm bất kỳ trên elip. Chứng tỏ rằng số khoảng cách từ M tới tiêu điểm phải F_2 và tới đường thẳng $x = \frac{8}{\sqrt{3}}$ có giá trị không đổi.

c) Cho đường tròn (C):

$$x^2 + y^2 + 4\sqrt{3} - 4 = 0$$

Xét đường tròn (C') di động nhưng luôn luôn đi qua tiêu điểm phải F_2 và tiếp xúc với đường tròn (C). Chứng tỏ rằng các tâm N của đường tròn (C') nằm trên một hypebol cố định. Viết phương trình hypebol đó.

3. Cho elip có phương trình (E): $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$

Xét một hình vuông ngoại tiếp elip (tức là các cạnh của hình vuông đều tiếp xúc với elip). Viết phương trình các đường thẳng chứa các cạnh của hình vuông đó.

4. Trong mặt phẳng Oxy, cho elip (E) có phương trình: $4x^2 + y^2 = 36$.

a) Tính độ dài trục lớn, trục nhỏ, tọa độ các tiêu điểm và phương trình các đường chuẩn.

b) Lập phương trình các tiếp tuyến của (E) song song với đường phân giác góc phần tư thứ hai của hệ trục Oxy.

c) Lập phương trình parabol (P) có đỉnh trùng với gốc tọa độ và tiêu điểm ở phía trên của elip (E).

5. Trong hệ tọa độ vuông góc Oxy cho các điểm A(-2; 0), B(2; 0) và M(x; y).

a) Xác định tọa độ của M, biết rằng M nằm phía trên trục hoành, số đo góc AMB = 90^0, số đo góc MAB = 30^0.

b) Khi M chuyển động trong mặt phẳng tọa độ sao cho tam giác AMB có số đo góc AMB gấp hai lần số đo góc MAB. Chứng minh rằng M chạy trên một nhánh của đường hypebol. Xác định tọa độ tiêu điểm của nhánh hypebol đó.

(ĐH Nông nghiệp I, 2000)

6. Cho parabol (P): $y = x^2 - 2x$ và elip (E): $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$

a) Chứng minh rằng parabol và elip cắt nhau tại bốn điểm phân biệt A, B, C, D.

b) Chứng minh bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn. Xác định tâm và bán kính của đường tròn đó.

(ĐH Ngoại thương (cơ sở II), 1999).

7. Cho parabol (P): $y^2 = 16x^2$. Viết phương trình tiếp tuyến của parabol:

a) Đi qua điểm A (1; -4)

b) Vuông góc với đường thẳng $2x - y + 5 = 0$.

8. a) Một đường kính của (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ cắt (E) tại M, N. Chứng minh rằng các tiếp tuyến của elip ở M và N song song với nhau.

b) Tìm quan hệ giữa a, b, k, m để (E) tiếp xúc với đường thẳng $y = kx + m$.

9. Cho hypebol (H): $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$

a) Viết phương trình đường thẳng (D) là tiếp tuyến của (H) và đi qua điểm A(2; -1).

b) Gọi M_1 là tiếp điểm của (H) và (D). Chứng minh (D) là phân giác của góc F_1MF_2 (F_1, F_2 là tiêu điểm của (H)).

10. Tìm quỹ tích tất cả những điểm từ đó có thể vẽ hai tiếp tuyến vuông góc với nhau tới:

a) Elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

b) Hypebol $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

c) Parabol $y^2 = 2px$

11. a) Cho elip $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Viết phương trình đường thẳng đi qua M(2; 1) cắt elip tại A, B sao cho MA = MB.

b) Cho hypebol $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{12} = 1$. Viết phương trình đường thẳng đi qua M(6; 1) cắt hypebol tại A và B sao cho M là trung điểm của AB.

12. Cho họ đường cong (P_λ) có phương trình

$\lambda x^2 + y^2 - 2y + 2 - \lambda = 0$, λ là tham số

Định rõ bản chất của họ đường cong (P_λ) tùy theo λ.

13. Cho một đoạn thẳng AB, trung điểm O, chiều dài AB = 2a, gọi k là một số thực khác 0. Tìm tập hợp những điểm M trong tam giác MAB sao cho tgA. tgB = k.

CHỦ ĐỀ II

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

§1. VECTƠ .TỌA ĐỘ CỦA VECTƠ VÀ CỦA ĐIỂM

. Kiến thức cần nhớ

Vectơ trong không gian

- Nếu ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng thì với mọi vectơ $\vec{x}$, ta đều có thể viết một cách duy nhất dưới dạng:

$$\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$$

- Tích vô hướng của hai vectơ được định nghĩa bởi công thức:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| . \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

Chú ý: + $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

+ Bình phương vô hướng của vectơ $\vec{a}$: $\vec{a} . \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$

Tọa độ của vectơ:

- Cho hệ tọa độ vuông góc Oxyz, với: $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ là ba vectơ đơn vị nằm lần lượt trên Ox, Oy, Oz. Khi đó:

$\vec{u}$ có tọa độ $\vec{u} = (x; y; z)$ nếu $\vec{u} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$

- Nếu $\vec{u} = (x; y; z)$ và $\vec{u}' = (x'; y'; z')$ thì

$\vec{u} \pm \vec{u}' = (x \pm x'; y \pm y'; z \pm z')$

$k\vec{u} = (kx; ky; kz)$

$\vec{u} . \vec{u}' = xx' + yy' + zz'$

$|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

• Tích có hướng của hai vectơ $\vec{u} = (x; y; z)$ và $\vec{u'} = (x', y', z')$ là vectơ, ký hiệu là $[\vec{u}; \vec{u'}]$, có tọa độ như sau:

$$[\vec{u}; \vec{u'}] = \left(\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z & x \\ z' & x' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \right)$$

Chú ý rằng nếu $\vec{u}$, $\vec{u'}$ là hai vectơ không cùng phương thì $[\vec{u}; \vec{u'}]$ là vectơ vuông góc với cả hai vectơ đó và có độ dài bằng diện tích hình bình hành ABCD trong đó $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ và $\overrightarrow{AD} = \vec{u'}$. Như vậy:

$|[\vec{u}; \vec{u'}]| = |\vec{u}| . |\vec{u'}|. \sin(\vec{u}; \vec{u'})$.

• Ba vectơ $\vec{u}$, $\vec{u'}$, $\vec{u''}$ đồng đẳng $\Leftrightarrow [\vec{u}; \vec{u'}].\vec{u''} = 0$.

• Nếu ABCD. A'B'C'D' là hình hộp thì thể tích V của nó được tính theo công thức:

$$V = \left| \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD} \right] . \overrightarrow{AA'} \right|$$

Tọa độ của điểm:

• Đối với hệ tọa độ vuông góc Oxyz, mỗi điểm M có tọa độ M(x; y; z) nếu vectơ $\overrightarrow{OM}$ có tọa độ (x; y; z).

• Nếu M = (x; y; z) và M' = (x'; y'; z') thì

+ $\overrightarrow{MM'} = (x' - x; y' - y; z' - z)$

+ $MM' = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}$

+ Điểm I chia đoạn thẳng MM' theo tỉ số $k \neq 1$ (tức là $\overrightarrow{IM} = k\,\overrightarrow{IM'}$) thì $x_1 = \dfrac{x - kx'}{1 - k}$, $y_1 = \dfrac{y - ky'}{1 - k}$, $z_1 = \dfrac{z - kz'}{1 - k}$.

2. Các ví dụ

VÍ DỤ 1.1

Cho tứ diện ABCD và M là một điểm di động trong không gian. Gọi G và G_1 lần lượt là trọng tâm tứ diện và trọng tâm ΔABC.

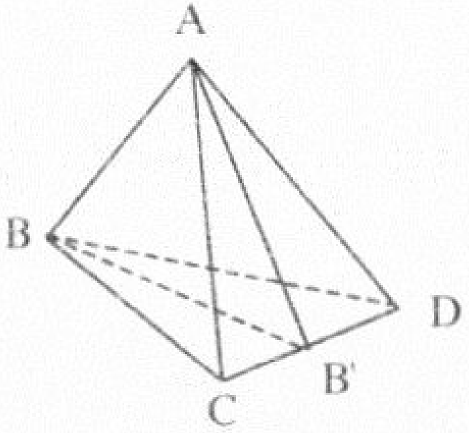
a. Chứng minh: $\overrightarrow{G_1B}+\overrightarrow{G_1C}+\overrightarrow{G_1D}=\vec{0}$

b. Chứng minh: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

c. Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn hệ thức:

$$3\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|=4\left|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|$$

LỜI GIẢI



a. Gọi B' là trung điểm của CD, ta có:

$$\overrightarrow{G_1C}+\overrightarrow{G_1D}=2\overrightarrow{G_1B'}$$

Mặt khác G_1 là trọng tâm của ΔBCD nên:

$$\overrightarrow{GB}=-2\overrightarrow{G_1B'}$$

Do đó: $\overrightarrow{G_1B}+\overrightarrow{G_1C}+\overrightarrow{G_1D}=-2\ \overrightarrow{G_1B'}+2\ \overrightarrow{G_1B'}=\vec{O}$ (đpcm).

b. Gọi G_2 là trọng tâm của ΔACD. Khi đó G là giao điểm của $\overrightarrow{AG_1}$ và $\overrightarrow{BG_2}$. Ta có:

$$\frac{B'G_1}{B'B}=\frac{B'G_2}{B'A}=\frac{1}{3}\qquad\Rightarrow G_1G_2\ //\ AB$$

$\Rightarrow\ \overrightarrow{GG_1}=-\overrightarrow{GA}$ (theo định lý Talet)

Mà $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=3\overrightarrow{GG_1}+\overrightarrow{G_1B}+\overrightarrow{G_1C}+\overrightarrow{G_1D}=3\overrightarrow{GG_1}$

Do đó: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GA}=\vec{0}$ (đpcm)

c. Ta có: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}$

$$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=3\overrightarrow{MG_1}$$

Do đó:

$$3\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|=4\left|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|$$

$$\Leftrightarrow\ 12\left|\overrightarrow{MG}\right|=12\left|\overrightarrow{MG_1}\right| \quad \Leftrightarrow MG=MG_1$$

Vậy tập hợp các điểm M là mặt phẳng trung trực (α) của đoạn GG_1.

Chú ý: 1. G là trọng tâm của $\Delta ABC \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow\ \forall O:\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$$

2. G là trọng tâm của tứ diện ABCD

$$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow\ \forall O:\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$$

3. Để chứng minh $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$ ta chứng minh $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0$.

VÍ DỤ 1.2

Cho 4 điểm A, B, C, D. Chứng minh rằng:

a. $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$ khi và chỉ khi $AC^2+BD^2=AD^2+BC^2$

b. Nếu $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BC}$, thì $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}$

(ĐH XD, 2000)

LỜI GIẢI

a. Ta có:

$AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$

$\Leftrightarrow \ \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AD}^2 = \overrightarrow{BC}^2 - \overrightarrow{BD}^2$

$\Leftrightarrow \ \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right) = \left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD}\right)\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}\right)$

$\Leftrightarrow \ 2\,\overrightarrow{DC}\,.\,\overrightarrow{AI} = 2\,\overrightarrow{DC}\,.\,\overrightarrow{BI}$ (I là trung điểm CD)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DC}\left(\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{BI}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{DC} = 0$

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{DC}$ (đpcm)

b. Ta có:

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC}\right)\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right) =$$

$$= \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{CD}$$

$$= 0 + \overrightarrow{DC}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}\right)$$

$$= 0 + \overrightarrow{DC}\,.\,\overrightarrow{BA} = 0$$

Vậy $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$

Chú ý:

1. Từ a, suy ra: "Một tứ giác có hai đường chéo vuông góc với nhau khi và chỉ khi tổng bình phương các cặp cạnh đối bằng nhau".

2. Từ b, suy ra: "Nếu một tứ diện có hai cặp cạnh đối vuông góc thì cặp cạnh đối còn lại cũng vuông góc".

VÍ DỤ 1.3

Cho hình lập phương ABCD. A'B'C'D' có các cạnh bằng 1. Trên các cạnh BB', CD, A'D' lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho B'M = CN = D'P = a $(0 < a < 1)$

a. Chứng minh: $\overrightarrow{MN} = -a\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + (a-1)\overrightarrow{AA'}$

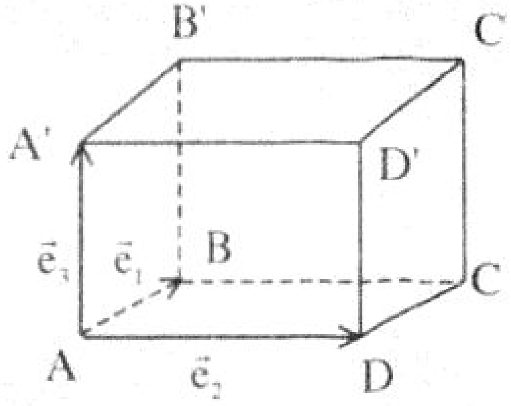
b. Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AC'}$ và $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{AC'}$. *Từ đó có thể nói gì về vị trí của AC' đối với mặt phẳng (MNP)?*

LỜI GIẢI

Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{e}_1$, $\overrightarrow{AD} = \vec{e}_2$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{e}_3$

Ta có: $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$

và $\vec{e}_1\vec{e}_2 = \vec{e}_2\vec{e}_3 = \vec{e}_3\vec{e}_1 = 0$



a. Ta có:

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$

Mà: $\overrightarrow{MB} = (1-a)\overrightarrow{BB'} = (1-a)\vec{e}_3$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \vec{e}_2$

$\overrightarrow{CN} = a\overrightarrow{CD} = -a\vec{e}_1$

Do đó: $\overrightarrow{MN} = -a\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + (a-1)\vec{e}_3$

Hay $\overrightarrow{MN} = -a\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + (a-1)\overrightarrow{AA'}$ (đpcm)

b. Ta có: $\overrightarrow{AC'} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$

Do đó: $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AC'} = [-a\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + (a-1)\vec{e}_3](\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)$

$$= -a + 1 + a - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{AC'} \qquad (1)$$

Mặt khác $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{B'A'} + \overrightarrow{A'D'}$

$$= a\vec{e}_3 - \vec{e}_1 + (1-a)\vec{e}_2$$

$$= -\vec{e}_1 + (1-a)\vec{e}_2 + a\vec{e}_3$$

Do đó: $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{AC} = \left[-\vec{e}_1 + (1-a)\vec{e}_2 + a\vec{e}_3\right](\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)$

$$= -1 + (1 - a) + a = 0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MD} \perp \overrightarrow{AC} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \overrightarrow{AC} \perp (MNP)$

Chú ý: 1. Diện tích hình bình hành dựng trên hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ là

$$S = |[\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AC}]|$$

2. Thể tích hình hộp dựng trên ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ là

$$V = |[\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AC}]\ .\ \overrightarrow{AD}\ |$$

VÍ DỤ 1.4

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho tứ diện ABCD có ba đỉnh A(2; 1; -1), B(3; 0; 1), C(2; -1; 3) còn đỉnh D nằm trên trục Oy. Tìm tọa độ đỉnh D nếu tứ diện có thể tích V = 5.

LỜI GIẢI

Tọa độ của điểm $D \in Oy$ có dạng $D(0; y_0; 0)$. Ta có:

$\overrightarrow{AB} = (1; -1; 2)$, $\overrightarrow{AC} = (0; -2; 4)$, $\overrightarrow{AD} = (-2; y_0 - 1; 1)$

Thể tích của tứ diện ABCD bằng $\frac{1}{6}$ thể tích hình hộp tạo bởi ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$. Do đó:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AC}]\ .\ \overrightarrow{AD}\ | = 5$$

Ta có:

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = \left(\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -2 & 4\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 0\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & -2\end{vmatrix}\right) = (0; -4; -2)$$

$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\overrightarrow{AD} = 0.(-2) - 4(y_0 - 1) - 2.1 = 2 - 4y_0$

Do đó: $V_{ABCD} = 5 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{6}|2 - 4y_0| = 5$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 - 4y_0 = 30 \\ 2 - 4y_0 = -30 \end{array}\right. \qquad \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y_0 = -7 \\ y_0 = 8 \end{array}\right.$$

Vậy có hai điểm D thỏa mãn yêu cầu bài toán là: (0; -7; 0) và (0; 8; 0).

BÀI TẬP

1. Cho tứ diện ABCD. Gọi E, F, I theo thứ tự là trung điểm của AB, CD, EF.

a) Chứng minh $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$

b) Với điểm M bất kỳ trong không gian, hãy chứng minh:

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 4\overrightarrow{MI}$$

c) Tìm điểm O sao cho: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ chứng minh điểm O là duy nhất.

d) Cho trước mặt phẳng (P). Tìm điểm M ∈ (P) sao cho: $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

2. Cho hình hộp ABCD. A'B'C'D'. Gọi P, R lần lượt là trung điểm các cạnh AB và A'D'.

Gọi P', Q, Q', R' lần lượt là giao điểm các đường chéo của các mặt (ABCD), (CDD'C'), (A'B'C'D'), (ADD'A').

a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{RR} = \vec{0}$

b) Chứng minh rằng: hai tam giác PQR và PQ'R' có trọng tâm trùng nhau.

3. Cho hình hộp chữ nhật ABCD. A'B'C'D'. Đặt $\overrightarrow{BA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BB'} = \vec{b}$, $\overrightarrow{B'C'} = \vec{c}$. Gọi M điểm chia đoạn thẳng AC' theo tỉ số m, N là điểm chia đoạn thẳng CD' theo tỉ số n.

a) Hãy biểu thị các vectơ $\overrightarrow{B'M}$, $\overrightarrow{B'N}$ theo $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ và m, n.

b) Xác định m, n để MN//B'D.

c) Tính độ dài đoạn MN.

4. Cho hình hộp ABCD. A'B'C'D'

a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA'} + 1.\overrightarrow{CC'} = \vec{0}$

b) Cho A(1; 0; 1), B(2; 1; 2), C'(4; 5; -5) và D(1; -1; 1).

Tính tọa độ các đỉnh còn lại.

(CĐ kinh tế đối ngoại, 1999)

5. Cho 3 điểm A (a; 0; 0), B (0; b; 0), C (0; 0; c) (a, b, c > 0)

a) Chứng tỏ ΔABC không thể là tam giác vuông.

b) Tính thể tích hình chóp OABC và diện tích ΔABC theo a, b, c.

(ĐH Mĩ thuật công nghệ, 1999)

6. Cho tứ diện với các đỉnh A(2; 0; 0), B(0; 4; 0), C(0; 0; 6), D(2; 4; 6).

a) Tính đường cao hạ từ D của tứ diện.

b) Tìm tập hợp các điểm M trong không gian sao cho:

$$\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right| = 4$$

Viết phương trình tập hợp đó.

(ĐH Nông nghiệp, 1998)

7. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho tứ diện ABCD với A(2; -1; 6), B(-3; -1; 4), C(5; -1; 0) và D(1; 2; 1).

a) Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác vuông. Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

b) Tính thể tích tứ diện ABCD.

(ĐH Thủy sản Nha Trang, 2000)

8. Trong không gian với hệ tọa độ Đêcac trực chuẩn Oxyz cho 4 điểm: S(3; 1; -2), A(5; 3; -1), B(2; 3; -4), C(1; 2; 0).

a) Chứng minh rằng hình chóp S.ABCD có đáy ABC là tam giác đều và ba mặt bên là các tam giác vuông cân.

b) Tính toạ độ điểm D đối xứng đối với điểm C qua đường thẳng AB. M là điểm bất kỳ thuộc mặt cầu có tâm là điểm D, bán kính $R = \sqrt{18}$ (điểm M không thuộc mặt phẳng (ABC)).

Xét tam giác có độ dài các cạnh bằng độ dài các đoạn thẳng MA, MB và MC. Hỏi tam giác ấy có đặc điểm gì?

ĐH Bách khoa Hà Nội, 2000)

§2. MẶT PHẲNG

1. Kiến thức cần nhớ

- Phương trình tổng quát của mặt phẳng có dạng:

$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$ trong đó $\vec{n} = (A; B; C)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng.

- Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $\vec{n} = (A; B; C)$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình tổng quát là:

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

- Nếu $\vec{u} = (x_1; y_1; z_1)$ và $\vec{v} = (x_2; y_2; z_2)$ là một cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng (α) thì:

$\vec{n} = [\vec{u}\,.\,\vec{v}] = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$ là một vectơ pháp tuyến của (α).

• Phương trình mặt phẳng qua giao tuyến của hai mặt phẳng cắt nhau

$Ax + By + Cz + D = 0$ và $A'x + B'y + C'z + D' = 0$

Có dạng:

$\lambda(Ax + By + Cz + D) + \mu(A'x + B'y + C'z + D') = 0$

$(\lambda^2 + \mu^2 \neq 0)$

• Cho hai mặt phẳng:

(α): $Ax + By + Cz + D = 0$

(α'): $A'x + By + C'z + D' = 0$

(α) cắt $(\alpha') \Leftrightarrow A : B : C \neq A' : B' : C'$

(α) trùng với $(\alpha') \Leftrightarrow \dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'} = \dfrac{D}{D'}$

$(\alpha) \,//\, (\alpha') \Leftrightarrow \dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'} \neq \dfrac{D}{D'}$

• Khoảng cách từ điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ tới mặt phẳng (α):

$Ax + By + Cz + D = 0$ được tính theo công thức:

$$d(M_0, \Delta) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

• Góc φ $(0^0 \leq \varphi \leq 90^0)$ giữa hai mặt phẳng $Ax + By + Cz + D = 0$ và $A'x + By + C'z + D' = 0$ được tính theo công thức:

$$\cos\varphi = \frac{|AA' + BB' + CC'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$$

2. Các ví dụ

VÍ DỤ 2.1

Lập phương trình mặt phẳng chứa gốc tọa độ và vuông góc với hai mặt phẳng:

(P): $x - y + z - 7 = 0$; (Q): $3x + 2y - 12z + 5 = 0$

LỜI GIẢI

Do mặt phẳng (α) cần tìm vuông góc (P) và (Q) nên (α) nhận một cặp vectơ chỉ phương là:

$\vec{a} = \vec{n}_P = (1; -1; 1)$ và $\vec{b} = \vec{n}_Q = (3; 2; -12)$.

Do đó một vectơ pháp tuyến của (α) là: $\vec{n} = (2; 3; 1)$

$\vec{n}_\alpha = [\vec{a}, \vec{b}] = (10; 15; 5)$

(α) là mặt phẳng qua O(0, 0; 0) và nhận $\vec{n} = (2; 3; 1)$ làm một vectơ pháp tuyến nên có phương trình:

$$2(x - 0) + 3(y - 0) + 1(z - 0) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + 3y + z = 0$$

VÍ DỤ 2.2

Cho bốn điểm A(-1; -2; 4), B(-4; -2; 0), C(3; -2; 1), D(1; 1; 1). Tính độ dài đường cao hạ từ D của tứ diện ABCD.

LỜI GIẢI

Phương trình mặt phẳng (ABC) có dạng:

$ax + by + cz + d = 0 \quad (a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$

$A(-1; -2; 4) \in (\alpha) \Rightarrow -a - 2b + 4c + d = 0$ (1)

$B(-4; -2; 0) \in (\alpha) \Rightarrow -4a - 2b + d = 0$ (2)

$C(3; -2; 1) \in (\alpha) \Rightarrow 3a - 2b + c + d = 0$ (3)

Từ (1), (2), (3) ta có hệ

$$\begin{cases} -a-2b+4c+d=0 \\ -4a-2b+d=0 \\ 3a-2b+c+d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=c=0 \\ d=2b \\ b \text{ tùy ý} \neq 0 \end{cases}$$

Chọn $b = 1$, ta được phương trình (α): $y + 2 = 0$

Độ dài đường cao hạ từ D của tứ diện ABCD bằng khoảng cách từ D tới mặt phẳng (ABC).

$$h = d(D,(ABC)) = \frac{|1+2|}{\sqrt{0^2+1^2+0^2}} = 3$$

Chú ý: Có thể tìm một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) bằng cách lấy $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$. Sau đó viết phương trình mặt phẳng khi biết một điểm và một vectơ pháp tuyến. Cách này thường nhanh hơn và ít bị nhầm về tính toán hơn.

VÍ DỤ 2.3

Xác định các tham số l và m để mặt phẳng:

$5x + ly + 4z + m = 0$

thuộc chùm mặt phẳng

$\alpha(3x - 7y + z - 3) + \beta(x - 9y - 2z + 5) = 0$

LỜI GIẢI

Mặt phẳng $5x + ly + 4z + m = 0$ thuộc chùm mặt phẳng đã cho ⇒ nó qua giao tuyến $3x - y + z + 2 = 0$ ⇔ nó chứa hai điểm của hai giao tuyến đó.

Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x-7y+z-3=0 \\ x-9y-2z+5=0 \end{cases}$$

Cho z = 0 ta được: $x = \frac{31}{10}, y = \frac{9}{10}$

y = 0 ta được: $x = \frac{1}{7}, z = \frac{18}{7}$

Vậy hai điểm thuộc giao tuyến là $A\left(\frac{31}{10}; \frac{9}{10}; 0\right)$ và $B\left(\frac{1}{7}; 0; \frac{9}{7}\right)$. Buộc hai điểm này thuộc đường thẳng 5x + ly + 4z + m = 0 ta có hệ:

$$\begin{cases} 5.\frac{31}{10} + \frac{9}{10}l + m = 0 \\ 5.\frac{1}{7} + 4.\frac{18}{7} + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9l + 10m = -155 \\ 7m = -11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -11 \\ l = -5 \end{cases}$$

Vậy m = -11; l = -5

VÍ DỤ 2.4

Cho 4 điểm A(0; 0; 0), B(3; 0; 0), C(1; 2; 1), D(2; -2; 2) trong hệ tọa độ Đêcac trực chuẩn Oxyz. Viết phương trình mặt phẳng đi qua 3 điểm: C, D và tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp ABCD.

(ĐH Xây dựng, 2000)

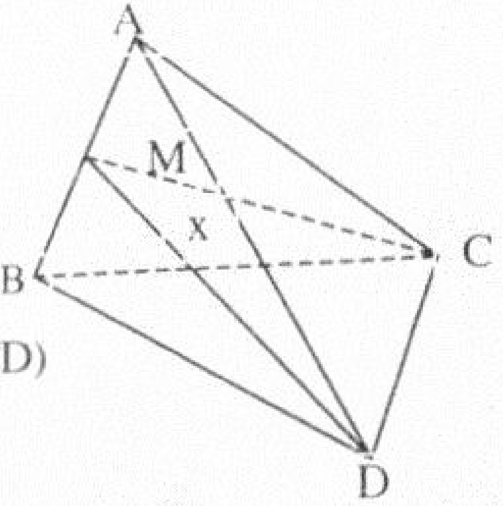
LỜI GIẢI

Mặt phẳng qua tâm mặt cầu nội tiếp ABCD và đi qua CD chính là mặt phẳng phân giác của góc nhị diện tạo bởi hai mặt phẳng (ACD) và (BCD).

Sử dụng chú ý sau VD1.2, để tìm được phương trình hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) là:

(ACD): $x - z = 0$

(BCD): $5x + 3y + 4z - 15 = 0$



$M(x, y, z) \in$ mặt phẳng (α) phải tìm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d(M,(ACD)) = d(M,(BCD)) \\ \text{M, B nằm cùng phía đối với (ACD)} \\ \text{M, A nằm cùng phía đối với (BCD)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|x-z|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \dfrac{|5x+3y+4z-15|}{\sqrt{5^2+3^2+4^2}} \\ (x-z)(3-0) > 0 \\ (5x+3y+4z-15)(5.0+3.0+4.0-15) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|z-z|}{\sqrt{2}} = \dfrac{|5x+3y+4z-15|}{\sqrt{50}} \\ x - z > 0 \\ 5x+3y+4z-15 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-z}{\sqrt{2}} = -\frac{5x+3y+4z-15}{\sqrt{50}}$$

$$\Leftrightarrow 5x - 5z = -5x - 3y - 4z + 15$$

$$\Leftrightarrow 10x + 3y - z - 15 = 0$$

VÍ DỤ 2.5

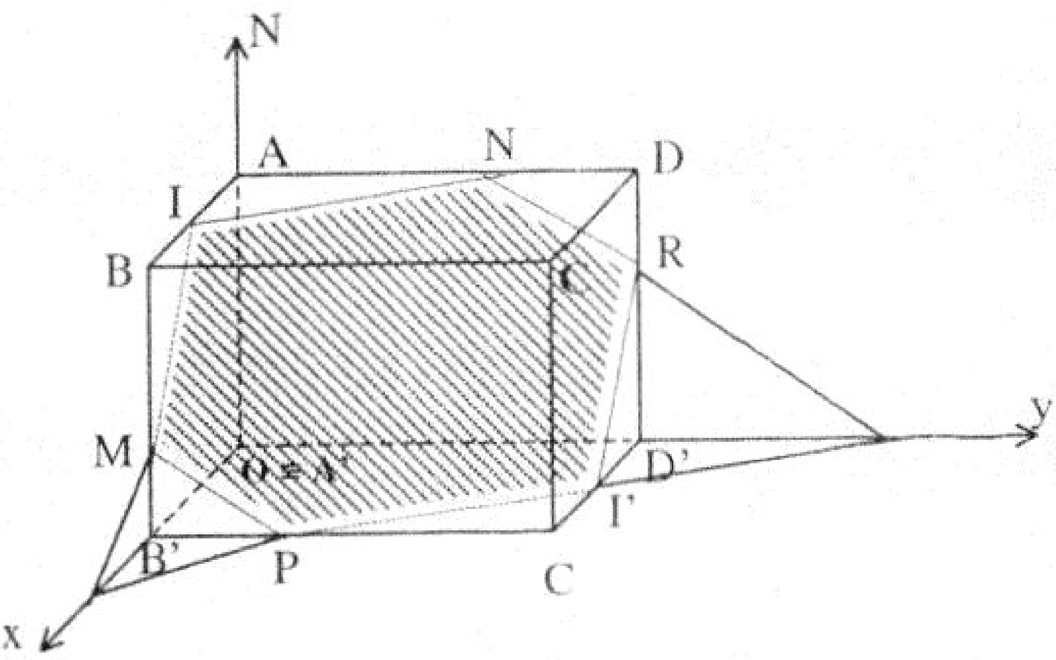
Trong không gian Oxyz cho hình lập phương ABCD. A'B'C'D'. Biết A'(0; 0; 0), B'(a; 0; 0), D'(0; a; 0), A(0; 0; a), trong đó a> 0. Gọi M, N là các điểm chạy trên các đoạn BB' và AD sao cho MN = AN = b (0 < b < a). Gọi I, I' là trung điểm của AB và C'D'.

a. Viết phương trình mặt phẳng (α) qua ba điểm M, N, I. Chứng minh $I' \in (\alpha)$.

b. Tính diện tích thiết diện tạo bởi giao của mặt phẳng (α) và hình lập phương ABCD. A'B'C'D'.

c. Tìm vị trí của M để chu vi thiết diện đạt giá trị nhỏ nhất.

LỜI GIẢI



Ta có:

$$C'(a;\ a;\ 0),\quad B(a;\ 0;\ a),\quad C(a;\ a;\ a),\quad D(0;\ a;\ a)$$

$$I\left(\frac{a}{2};0;a\right),\quad I'\left(\frac{a}{2};a;0\right),\quad M(a;\ 0;\ a-b),\ N\ (0;\ b;\ a)$$

Suy ra $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{a}{2};\ 0;\ -b\right)$, $\quad \overrightarrow{NI} = \left(-\frac{a}{2};\ b;\ 0\right)$

Vectơ pháp tuyến mặt phẳng (IMN) là $\vec{n} = (2b;\ a;\ a)$.

$$\vec{n} = \overrightarrow{MN} \wedge \overrightarrow{NI} = \left(b^2;\ \frac{ab}{2};\ \frac{ab}{2}\right) = \frac{1}{2}b(2b;\ a;\ a)$$

Phương trình tổng quát của mặt phẳng (IMN) là:

$$2b(x - 0) + a(y - b) + a(z - a) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2bx + ay + az - ab - a^2 = 0$$

Thay toạ độ của I' vào phương trình mặt phẳng (IMN), ta có:

$2b\frac{a}{2} + a.a - ab - a^2 = 0$ đúng $\forall a, b > 0$

Vậy I' ∈ mặt phẳng (IMN)

b. Ta có: IM cắt A'x tại M'; M'I' cắt B'C' tại P, cắt A'y tại Q'; NQ' cắt DD' tại Q và AQ cắt DD' tại R ⇒ Thiết diện nhận được là lục giác INRI'PM.

Do tính chất giao tuyến của mặt phẳng song song, ta có:

NQ//II'??MP; MI//QI; IN//PI'

Và AN = BM = C'P = P'Q = b

Trong ΔANI có: $IN = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}} = I'Q = I'P$

Trong ΔMB'P có: $MP = \sqrt{B'M^2 + BP^2} = \sqrt{(a-b)^2 + (a-b)^2}$

$$= (a - b)\sqrt{2}$$

Tương tự: $NQ = \sqrt{2}\,(a - b)$

Ta có:

$MN = \sqrt{a^2 + b^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + 2b^2}$

$I\,I' = \sqrt{0^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$

Diện tích thiết diện $S = \frac{1}{2}\,(MP + I\,I')MN$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(2a - b)\sqrt{a^2 + 2b^2}$$

c. Chu vi thiết diện IMPI'QN là:

$$4IM + 2MP = 2\sqrt{a^2 + 4b^2} + 2\sqrt{2}(a - b)$$

Xét hàm $f(b) = 2\sqrt{a^2 + 4b^2} + 2\sqrt{2}(a - b)$ với $0 < b < a$

Ta có $f'(b) = \dfrac{8b}{\sqrt{a^2 + 4b^2}} - 2\sqrt{2} = \dfrac{2\left(4b - \sqrt{2}\sqrt{a^2 + 4b^2}\right)}{\sqrt{a^2 + 4b^2}}$

$$f'(b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4b = \sqrt{2}.\sqrt{a^2 + 4b^2} \\ b \in (0; a) \end{cases} \Leftrightarrow \quad b = \frac{a}{2}$$

Xét: $f(0) = 2a(1 + \sqrt{2})$

$$f\left(\frac{a}{2}\right) = 2\sqrt{2}\,a^2 + 2\sqrt{2}\,\frac{a}{2} = 3\sqrt{2}\,a$$

$$f(a) = 2a\sqrt{5}$$

$$\min_{b \in (0; a)} f(b) = \min\left\{f(0); f\left(\frac{a}{2}\right); f(a)\right\} = f\left(\frac{a}{2}\right)$$

Vậy $\min\limits_{b \in (0; a)} f(b) = \min\limits_{b \in (0; a)} f(b) = f\left(\dfrac{a}{2}\right) = 3\sqrt{2}\,a$

BÀI TẬP

1. Trong không gian cho các mặt phẳng:

(α): $2x - y + 3z + 1 = 0$ và

(β): $x + y - z + 5 = 0$ và điểm $M(1; 0; 5)$

a) Tính khoảng cách từ M đến (α)

b) Viết phương trình mặt phẳng đi qua giao tuyến (d) của (α) và (β) đồng thời vuông góc với mặt phẳng ($3x - y + 1 = 0$.

2. Trong không gian với hệ tọa độ trực chuẩn Oxyz, cho hai mặt phẳng có phương trình:

(α): $4x + ay + 6z - 20 = 0$

(β): $bx - 12y - 12z + 4 = 0$

a, b là các tham số lấy mọi giá trị thực.

a) Xác định các giá trị của a và b để hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau. Trong trường hợp đó hãy tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng.

b) Trong trường hợp $a = b = 0$, hãy tìm hình chiếu H của điểm A(1; 1; 1) trên giao tuyến (d) của hai mặt phẳng (α) và (β) và tính khoảng cách từ A đến giao tuyến (d).

3. Cho mặt phẳng (P): $6x + 3y + 2z - 6 = 0$.

a) Tìm tọa độ hình chiếu của điểm A(0; 0; 1) lên mặt phẳng (P).

b) Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với điểm A qua mặt phẳng (P).

4. Viết phương trình mặt phẳng phân giác của góc tạo bởi hai mặt phẳng (P): $x^2 - 2y + z - 1 = 0$ và (Q): $2x + y + z + 1 = 0$ mà góc đó chứa điểm $M_0(1; 1; 1)$.

5. Viết phương trình mặt phẳng phân giác của góc nhọn tạo bởi hai mặt phẳng:

(P): $x - 2y + z = 0$; (P') : $2x + y + z + 1 = 0$

6. Cho hai điểm phân biệt $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ không nằm trên mặt phẳng (α): $Ax + By + Cz + D = 0$.

Tìm điều kiện cần và đủ để:

a) Đường thẳng M_1M_2 cắt (α)

b) Đoạn thẳng M_1M_2 cắt (α)

c) Đường thẳng M_1M_2 cắt (α) tại I sao cho M_1 nằm giữa I và M_2

d) Đường thẳng M_1M_2 cắt (α) tại I sao cho M_2 nằm giữa I và M_1.

7. trong không gian với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxyz cho ba điểm A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c), với a, b, c dương.

a) Viết phương trình mặt phẳng ABC.

b) Xác định tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ I lên mặt phẳng ABC. Tính độ dài OH.

c. Giả sử a, b, c thay đổi nhưng luôn thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = k^2$ (k > 0).

Khi nào thì diện tích tam giác ABC lớn nhất. Chứng tỏ rằng khi đó đoạn OH cũng có độ dài lớn nhất.

8. Cho hai điểm A(-1; 3; -2), B(-9; 4; 9) và mặt phẳng (P): $2x - y + z + 1 = 0$. Tìm điểm $K \in (P)$ sao cho AK + BK nhỏ nhất.

§3 ĐƯỜNG THẲNG

1. Kiến thức cần nhớ

- Đường thẳng đi qua điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ và nhận $\vec{u} = (a; b; c)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình tham số:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \qquad (t \in R)$$

hoặc phương trình chính tắc

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

- Đường thẳng là giao tuyến của hai mặt phẳng cắt nhau

(α): $Ax + By + Cz + D = 0$ và (α'): $A'x + B'y + C'z + D' = 0$ có phương trình tổng quát

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases} \text{ trong đó } A : B : C \neq A' : B' : C'$$

- Cho hai đường thẳng

(d): $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$, đi qua điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ (a; b; c).

(d'): $\dfrac{x - x'_0}{a'} = \dfrac{y - y'_0}{b'} = \dfrac{z - z'_0}{c'}$, đi qua điểm $M'_0(x'_0, y'_0, z'_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}'$ (a'; b'; c').

(d) và (d') đồng phẳng $\Leftrightarrow [\vec{u}, \vec{u}'] . \overrightarrow{M_0M'_0} = 0$

(d) // (d') $\Leftrightarrow a : b : c = a' : b' : c' \neq (x'_0 - x_0) : (y'_0 - y_0) : (z'_0 - z_0)$

(d) $\equiv$ (d') $\Leftrightarrow a : b : c = a' : b' : c' = (x'_0 - x_0) : (y'_0 - y_0) : (z'_0 - z_0)$

(d) chéo (d') $\Leftrightarrow [\vec{u}, \vec{u}'] . \overrightarrow{M_0M'_0} \neq 0$

- Cho đường thẳng (d): $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$

và mặt phẳng (α) : $Ax + By + Cz + D = 0$.

(d) cắt $(\alpha) \Leftrightarrow Aa + Bb + Cc \neq 0$

$$\text{(d) // }(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} Aa + Bb + Cc = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{(d)} \subset (\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} Aa + Bb + Cc = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{cases}$$

- Góc φ giữa hai đường thẳng

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z=z_0}{c} \text{ và } \frac{x-x'_0}{a}=\frac{y-y'_0}{b}=\frac{z=z'_0}{c}$$

được xác định bởi

$$\cos\varphi=\frac{|aa'+bb'+cc'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}} \qquad (0\le\varphi\le\frac{\pi}{2})$$

- Góc φ giữa đường thẳng $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$ và mặt phẳng Ax + By + Cz + D = 0 được xác định bởi

$$\sinh\varphi=\frac{|Aa+Bb+Cc|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \qquad (0\le\varphi\le\frac{\pi}{2})$$

VÍ DỤ 3.1

Viết phương trình đường thẳng (Δ) qua điểm M(1; 1; 2) và song song với đường thẳng (d): $\begin{cases}3x-y+2z-7=0\\ x+3y-2z+3=0\end{cases}$

LỜI GIẢI

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng : 3x - y + 2z - 7 = 0 là $\vec{n}_1$ (3; -1; 2)

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng : x +3y - 2z - 3 = 0 là $\vec{n}_2$ (1; 3; -2)

Do đó một vectơ chỉ phương của (d) là: $\vec{u}\,[\vec{n}_1, \vec{n}_2]$

$$\vec{u}=\left(\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 3 & -2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2 & 3\\ -2 & -1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix}\right)=(-4; 8; 10)$$

Đường thẳng (Δ) đi qua M(1; 1; 1) và song song với (d) (nhận $\frac{1}{2}\vec{u}$ làm vectơ chỉ phương) nên có phương trình tham số.

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 + 4t \\ z = 1 + 5t \end{cases} \qquad (t \in R)$$

hoặc phương trình chính tắc

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{5}$$

VÍ DỤ 3.2

Viết phương trình của đường thẳng đi qua điểm M(2; -1; 0), vuông góc và cắt đường thẳng (d) có phương trình:

$$\begin{cases} 5x + y + z + 2 = 0 \\ x - y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

(ĐH Thương mại, 2000)

LỜI GIẢI

Vectơ chỉ phương của (d) là:

$$\vec{u} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) = (3; -9; 6)$$

Do đó $\vec{u} = (1; -3; -2)$ cũng là vectơ chỉ phương của (d) thay $x = 0$ vào phương trình của (d), ta được $y = z = -1$.

⇒ (d) đi qua điểm A(0; -1; -1)

Do đó phương trình tham số của (d) là:

$$\begin{cases} x = t \\ y = -1 - 3t \\ z = -1 - 2t \end{cases} \qquad (t \in R)$$

Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ M xuống (d). Tọa độ H có dạng: $H = (t; -1 - 3t; -1 - 2t)$, $\overrightarrow{MH} = (t - 2; -3t; -1 - 2t)$.

Ta phải có:

$\overrightarrow{MH} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{MH} . \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 1(t - 2) - 3(-3t) - 2(-1 - 2t) = 0$

$\Leftrightarrow t = 0$

Từ đó H = (0; -1; -1)

Đường thẳng cần tìm là đường thẳng đi qua M(2; -1; 0) với vectơ chỉ phương $\overrightarrow{HM}$ = (2; 0; 1) nên có phương trình:

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 \\ z = t \end{cases} \qquad (t \in R)$$

Chú ý: Để viết phương trình một đường thẳng, ta có hai phương pháp:

- Phương pháp 1: Tìm một điểm và một vectơ chỉ phương của đường thẳng. Khi đó ta viết phương trình đường thẳng dưới dạng tham số, hoặc chính tắc.

- Phương pháp 2: Tìm hai mặt phẳng xác định đường thẳng cần thiết lập phương trình. Khi đó ta viết phương trình đường thẳng dưới dạng tổng quát.

Dưới đây ta xét một số ví dụ minh họa phương pháp 2.

VÍ DỤ 3.3

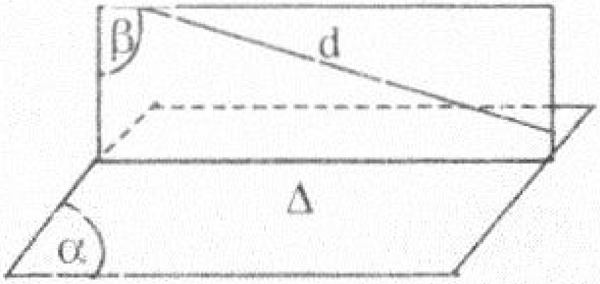
Viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng

(d) $\frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{1}$

trên mặt phẳng (α): $x + 2y + 3z + 4 = 0$

(ĐHSP Quy Nhơn, 2000)

LỜI GIẢI



Vectơ chỉ phương của (d) là $\vec{u}\,(3;\ 4;\ 1)$

Vectơ pháp tuyến của (α) là $\vec{n}\,(1;\ 2;\ 3)$.

Gọi (β) là mặt phẳng chứa (d) và song song với $\vec{n}$. Khi đó hình chiếu vuông góc Δ của d trên (α) chính là giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β):

$\vec{n}_1\,(\vec{u}\ ;\ \vec{n}\,) = (10;\ -8;\ 1)$

Mặt phẳng (β) đi qua điểm $(2;\ -2;\ 1) \in$ (d) và nhận $\vec{n} = (10;\ -8;\ 1)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình:

$-10\,(x - 2) - 8(y + 2) + 1(z - 1) = 0$

$\Leftrightarrow 10x - 8y + z - 37 = 0$

Vậy phương trình hình chiếu (Δ) cần tìm là:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4 = 0 \\ 10x - 8y + z - 37 = 0 \end{cases}$$

VÍ DỤ 3.4

Cho hai đường thẳng (D_1) và (D_2) lần lượt có phương trình:

$$(D_1): \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases} \quad ; \quad (D_2): \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -5t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad (t \in R)$$

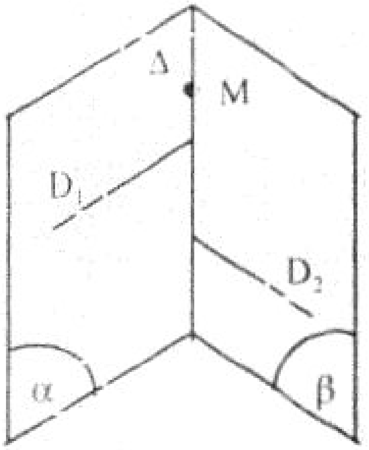
Viết phương trình đường thẳng (Δ) đi qua điểm M (1; 1; 1) và cắt đồng thời cả (D_1) và (D_2)

LỜI GIẢI

Gọi (α) là mặt phẳng qua M và chứa (D_1)

(β) là mặt phẳng qua M và chứa (D_2)

Khi đó đường thẳng phải tìm là giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β).



* Lập phương trình mặt phẳng (α).

Phương trình mặt phẳng (α) có dạng:

$\lambda(x + y + 2z) + \mu(x - y + z + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (\lambda + \mu)x + (\lambda - \mu)y + (2\lambda + \mu)z + \mu = 0$

Vì (α) đie qua $M(1; 1; 1)$ nên:

$(\lambda + \mu).1 + (\lambda - \mu).1 + (2\lambda + \mu).1 + \mu = 0$

$\Leftrightarrow 4\lambda + 2\mu = 0$

Chọn $\lambda = 1$, $\mu = -2$ ta được phương trình mặt phẳng (α):

(α): $-x + 3y - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x - 3y + 2 = 0$

* Lập phương trình mặt phẳng (β)

Ta có $A(-2; 0; 2) \in (D_2) \Rightarrow (\beta)$ có cặp vectơ chỉ phương là:

$\overrightarrow{A_1M} = (3; 1; -1)$, $\vec{a}_2 = (2; -5; 1)$

Do đó vectơ pháp tuyến của (β) là:

$$\vec{n} = \left[\overrightarrow{A_1M}, \vec{a}_2\right] = \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}; \square\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \right)$$

$= (-4; -5; -17)$

Phương trình mặt phẳng (β):

$-4(x + 2) - 5(y - 0) - 17(z - 2) = 0$

$\Leftrightarrow 4x + 5y + 17z - 26 = 0$

Vậy phương trình đường thẳng phải tìm $\Delta = (\alpha) \cap (\beta)$ là:

$$\begin{cases} x - 3y + 2 = 0 \\ 4x + 5y + 17 - 26 = 0 \end{cases}$$

VÍ DỤ 3.5

Trong không gian với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxyz, cho hai đường thẳng (Δ) có phương trình:

$$(\Delta): \quad \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{2}$$

$$(\Delta'): \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 \end{cases}$$

a. Chứng tỏ rằng hai đường thẳng (Δ) và (Δ') chéo nhau.

b. Tính khoảng cách giữa (Δ) và (Δ')

c. Viết phương trình đường vuông góc chung của (Δ) và (Δ').

LỜI GIẢI

a. Đường thẳng (Δ) đi qua A(2; -1; 0) và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ = 3; -2; 2)

Đường thẳng (Δ') đi qua B (-1; 2; 1) và có vectơ chỉ phương $\vec{u}'$ =(3; 2; 0).

Ta có: $\overrightarrow{AB}$ = (-3; 3; 1). Muốn chứng minh (Δ) và (Δ') chéo nhau ta chứng minh ba vectơ $\vec{u}$, $\vec{u}'$, $\overrightarrow{AB}$ không đồng phẳng. Thật vậy, a có:

$$[\vec{u}, \vec{u}'] = \left(\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \right)$$

$$= (-8; 6; 12)$$

$[\vec{u}, \vec{u}'] . \overrightarrow{AB} = -8.(-3) + 6.3 + 12.1 = 42 \neq 0$

$\Rightarrow \vec{u}, \vec{u}', \overrightarrow{AB}$ không đồng phẳng $\Rightarrow \Delta$ và Δ' chéo nhau.

b. Giả sử M $(2 + 3u; -1 -2u; 2u) \in (\Delta)$

N $(-1 + 3t; 2 + 2t; 1) \in (\Delta')$

Ta có $\overrightarrow{MN} = (-3 + 3t - 3u; 3 + 2t + 2u; 1 - 2u)$

MN là đường vuông góc chung của Δ và Δ' $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN}.\vec{u} = 0 \\ \overrightarrow{MN}.\vec{u}' = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(-3+3t-3u)-2(3+2t+2u)+2(1-2u)=0 \\ 3(-3+2t-3u)+2(3+2t+2u)+2(1-2u)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5t-17u=-13 \\ 13t-5u=3 \end{cases}$$

VÍ DỤ 3.6

Trong không gian với hệ tọa độ Đêcac trực chuẩn Oxyz cho đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) có phương trình:

(d) : $x = 1 + 2t;\ y = 2 - t;\ z = 3t$

(P): $2x - y - 2z + 1 = 0$

a. Tìm tọa độ các điểm thuộc đường thẳng (d) sao cho khoảng cách từ mỗi điểm đó đến mặt phẳng (P) bằng 1.

b) Gọi K là điểm đối xứng của điểm I (2; -1; 3) qua đường thẳng (d). Hãy xác định tọa độ điểm K.

LỜI GIẢI

a. Khoảng cách từ một điểm trên (d) đến (P) bằng 1, nghĩa là ta có:

$$1 = \frac{\left|2(1+2t)-(2-t)-2.3t+1\right|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \frac{\left|-t+1\right|}{3}$$

$$\Leftrightarrow |t - 1| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t-1=3 \\ t-1=-3 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} t=4 \\ t=-2 \end{array}\right.$$

Vậy có hai điểm thỏa mãn điều kiện đề bài là:

(9; -2; 12) và (-3; 4; -6)

b. Mặt phẳng qua I vuông góc với (d) có phương trình là:

$$2(x - 2) - 1(y + 1) + 3(z - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - y + 3z - 14 = 0$$

Để tìm giao điểm của (d) và mặt phẳng này ta thay x, y, z ở phương trình của (d) vào phương trình mặt phẳng.

$$2(1 + 2t) - (2 - t) + 3.3t - 14 = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

Ta được hình chiếu H của I trên (d) là: H(3; 1; 3) H là trung điểm của IK suy ra:

$$\begin{cases} x_K = 2x_H - x_I = 6 - 2 = 4 \\ y_K = 2y_H - y_I = 2 - (-1) = 3 \\ z_K = 2z_H - z_I = 6 - 3 = 3 \end{cases}$$

Vậy tọa độ điểm K cần tìm là (4; 3; 3)

VÍ DỤ 3.7

Xác định góc nhọn tạo bởi đường thẳng

$$(D): \begin{cases} x + 4y - 2z + 7 = 0 \\ 3x + 7y - 2z = 0 \end{cases}$$

và mặt phẳng (α): $3x + y - z + 1 = 0$

LỜI GIẢI

Vectơ chỉ phương của đường thẳng:

$$\vec{u} = \left(\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \right) = (6; -4; 5)$$

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng: $\vec{n} = (3; 1; -1)$

Góc φ giữa đường thẳng và mặt phẳng xác định bởi:

$$\text{Sin}\varphi = \left|\cos(\vec{u}, \vec{n})\right| = \frac{|\vec{u}.\vec{n}|}{|\vec{u}|.|\vec{n}|} =$$

$$= \frac{|18 - 4 + 5|}{\sqrt{36 + 16 + 25}\sqrt{3^2 + 1^2 + 1}} = \frac{19}{11\sqrt{7}}$$

VÍ DỤ 3.8

Trong không gian với hệ tọa độ trực chuẩn Oxyz, cho ΔABC có C(3; 2; 3), đường cao AH nằm trên đường thẳng (d_1) có phương trình (d_1): $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-3}{-2}$ *và đường phân giác trọng BM của góc B nằm trên đường thẳng (d_2) có phương trình: (d_2):* $\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-3}{1}$.

Tính độ dài các cạnh của ΔABC

(ĐH Mỏ Địa Chất, 2000)

LỜI GIẢI

Đưa phương trình của (d_1), (d_2) về dạng tham số

$$(d_1): \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + t \\ z = 3 - 2t \end{cases} ; \qquad (d_2): \begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 4 - 2t' \\ z = 3 + t' \end{cases}$$

Tọa độ điểm $B \in (d_2)$ có dạng $B(1 + t'; 4 - 2t'; 3 + t')$

Do đó: $\overrightarrow{BC} = (2 - t'; 2t' - 2; -t')$

Ta có:

$BC \perp d_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} \,.\, \vec{u}_1 = 0$

$\Leftrightarrow (2 - t') + (2t' - 2) + (-2) . (-t') = 0 \Leftrightarrow t' = 0$

Vậy B (1; 4; 3)

Phương trình đường thẳng (d) chứa BC:

$$(d): \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 \end{cases}$$

Ta dễ dàng tính được $(d) \cap (d_1) = H\,(2;\,3;\,3)$

$$(d) \cap (d_1) = I\left(\frac{5}{3}; \frac{8}{3}; \frac{11}{3}\right)$$

Tọa độ điểm $A \in (d_1)$ có dạng A (2 + t; 3 + t; 3 - 2t)

Ta có: $\overrightarrow{BA} = (t - 1;\, t - 1;\, -2t)$, $\overrightarrow{BH}\,(1;\, -1;\, 0)$, $\overrightarrow{BI}\left(\frac{2}{3}; \frac{-4}{3}; \frac{2}{3}\right)$

Do BI là đường phân giác của góc HBA nên ta có

$$\cos(\overrightarrow{BA}\,,\,\overrightarrow{BI}) = \cos(\overrightarrow{BH}\,,\overrightarrow{BI})$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{2}{3}(t+1) - \frac{4}{3}(t-1) - \frac{4}{3}t}{\sqrt{(t+1)^2 + (t-1)^2}\,.\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2}} = \frac{\frac{2}{3} + \frac{4}{3} + 0}{\sqrt{2}.\sqrt{\frac{24}{9}}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1-t}{\sqrt{3t^2+1}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t < 1 \\ 1 - t = \sqrt{3t^2 + 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t < 1 \\ t^2 + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -1 \end{cases}$$

Với t = 0 $\Rightarrow$ A(2; 3; 3) ≡ H (loại)

Với t = -1 $\Rightarrow$ A(1; 2; 5) (thích hợp)

Vậy tọa độ 3 đỉnh ΔABC là:

A(1; 2; 5), B(1; 4; 3), C(3; 2; 3)

Do đó độ dài các cạnh của ΔABC là:

$$\overrightarrow{AB} = (0; 2; -2) \Rightarrow AB = \sqrt{O^2 + +2^2(-2)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{AC} = (2; 0; -2) \Rightarrow AC = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{BC} = (2; -2; 0) \Rightarrow BC = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 0^2} = 2\sqrt{2}$$

Suy ra ΔABC đều

BÀI TẬP

1. Cho đường thẳng (d): $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{3}$ và mặt phẳng (P): x - y - z - 1 = 0. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng (Δ) qua A(1; 1; -2), song song với (P) và vuông góc với đường thẳng (d).

(ĐH TCKT Hà Nội, 1999)

2. Tam giác ABC có A(1; 2; 5) và phương trình hai đường trung tuyến là:

$$\frac{x-3}{-2} = \frac{y-6}{2} = \frac{z-1}{1}; \qquad \frac{x-4}{1} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-2}{1}$$

a) Viết phương trình chính tắc các cạnh của tam giác.

b) Viết phương trình chính tắc của đường phân giác trong góc A.

3. Cho mặt phẳng (P) đi qua A(0; 0; 1), B(-1; -2; 0), C(2; 1; -1).

a) Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P).

b) Viết phương trình tham số của đường thẳng (d) đi qua trọng tâm ΔABC và vuông góc với mặt phẳng (P).

c) Xác định chân đường cao hạ từ A xuống BC.

Tính thể tích tứ diện OABC.

4. Cho đường thẳng (d): $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{\cdot 2}$ và mặt phẳng (P): $x+y+z+1=0$. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của (d) trên mặt phẳng (P).

5. Viết phương trình đường thẳng (d) vuông góc vgới mặt phẳng (P): $x+y+z=1$ và cắt hai đường thẳng:

(d_1): $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=z$; (d_2) $\begin{cases}x-2y+z-4=0\\2x-y+2z+1=0\end{cases}$

6. Cho ba đường thẳng:

(d_1): $\frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{1}$

(d_2): $\frac{x-7}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-9}{-1}$

(d_3): $\frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-2}{-1}$

Lập phương trình đường thẳng cắt (d_1), (d_2) và song song với (d_3).

7. a) Cho hai đường thẳng:

(d_1): $\begin{cases}x+y+2z=0\\x-y+z+1=0\end{cases}$; (d_2): $\begin{cases}x=-2+2t\\y=-t\\z=2+t\end{cases}$

Chứng minh (d_1) và (d_2) chéo nhau.

b) Cho hai đường thẳng có phương trình:

$$(d_1): \frac{x-1}{-2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-4}{3}; \qquad (d_2): \begin{cases} x = t-1 \\ y = -t \\ z = 3t-2 \end{cases}$$

Hãy chứng tỏ hai đường thẳng đã cho nằm trên cùng một mặt phẳng và hãy lập phương trình của mặt phẳng đó.

c) Cho hai đường thẳng:

$$(d_1): \begin{cases} x = 5+2t \\ y = 1-t \\ z = 5-t \end{cases} \quad \text{và} \quad (d_2): \begin{cases} x = 3+2t' \\ y = -3-t' \\ z = 1-t' \end{cases}$$

Chứng tỏ hai đường thẳng (d_1) và (d_2) song song. Viết phương trình mặt phẳng chứa (d_1) và (d_2).

(ĐHSP Quy Nhơn,1999)

8. Trong hệ tọa độ trực chuẩn cho họ mặt phẳng (P_m) có phương trình:

$2x + y + z - 1 + m(x + y + z + 1) = 0$, m là tham số

a) Chứng minh rằng với mọi m, mặt phẳng (P_m) luôn đi qua một đường thẳng (d) cố định.

b) Tìm m để mặt phẳng (P_m) vuông góc với mặt phẳng (P_0) có phương trình $2x + y + z - 1 = 0$.

Tính khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng (d).

9. Cho hai đường thẳng:

$$(d_1): \begin{cases} x = 2+t \\ y = 1-t \\ z = 2t \end{cases} \quad \text{và} \quad (d_2): \begin{cases} x + 2z - 2 = 0 \\ y - 3 = 0 \end{cases}$$

a) Chứng minh (d) và (d') chéo nhau. Hãy viết phương trình đường vuông góc chung của (d) và (d').

b) Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng cách đều (d), (d').

10. Cho mặt phẳng (P): $x + y + z - 1 = 0$ và hai điểm $A(1; -3; 0)$, $B(5; -1; -2)$.

a) Chứng tỏ rằng đường thẳng qua A, B cắt mặt phẳng (P) tại một điểm I thuộc đoạn AB. Tìm tọa độ điểm I.

b) Tìm trên mặt phẳng (P) điểm M sao cho $|MA - MB|$ có giá trị lớn nhất.

(ĐHQG Hà Nội, 2000)

§4: MẶT CẦU

I. Kiến thức cần nhớ

- Mặt cầu tâm $I(a; b; c)$, bán kính R có phương trình chính tắc

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

- Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2Ax + 2By + 2Cz + D = 0$ với $A^2 + B^2 + C^2 >$ biểu thị một mặt cầu có tâm $I(-A; -B; -C)$, bán kính $R\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - D}$.

- Phương trình chùm mặt cầu:

+ Phương trình mặt cầu qua giao tuyến của mặt phẳng $Ax + By + Cz + D = 0$ và mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$ có dạng:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + đ + \alpha(Ax + By + Cz + D) = 0$$

+ Phương trình mặt cầu giao tuyến của hai mặt cầu:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2a'x + 2b'y + 2c'z + d' = 0$$

có dạng:

$\lambda(x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d) + \mu(x^2 + y^2 + z^2 + 2a'x +$ $+ 2b'y + 2c'z + d') = 0 \quad (\lambda + \mu \neq 0)$

• Cho mặt cầu (S): $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ và mặt phẳng (α): Ax + By + Các + D = 0. Khoảng cách từ tâm I(a; b; c) của mặt cầu đến mặt phẳng (α) là:

$$d = \frac{|Aa + Bb + Cc + Dd|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

+ Nếu d < R thì (α) cắt mặt cầu (S). Giao tuyến là đường tròn có phương trình:

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

Đường tròn này có tâm I' là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (α) và có bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.

+ Nếu d = R thì (α) tiếp xúc với mặt cầu.

+ Nếu d > R thì (α) không cắt mặt cầu.

II. Các ví dụ

VÍ DỤ 4.1

Lập phương trình mặt cầu có tâm thuộc đường thẳng

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2}$$

và tiếp xúc với hai mặt phẳng: $x + 2y - 2z = 0;\ x + 2y - 2z + 4 = 0$

LỜI GIẢI

Phương trình tham số của đường thẳng:

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \qquad (t \in R)$$

Tâm I của mặt cầu có tọa độ dạng I = (2-t; 1+2t; 1+2t). Mặt cầu tâm I tiếp xúc với hai mặt phẳng đã cho ⇔ khoảng cách từ I đến hai mặt phẳng bằng nhau.

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\left|(2-t)+2(1+2t)-2(1+2t)-2\right|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}$$

$$= \frac{\left|2-t+2(1+2t)-2(1+2t)+42\right|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|-t|}{3} = \frac{|6-t|}{3} \qquad \Leftrightarrow \quad |t-6| = |\ t\ |$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t - 6 = t \\ t - 6 = -t \end{array}\right. \qquad \Leftrightarrow t = 3$$

Vậy tâm I của mặt cầu có tọa độ I (-1; 7; 7)

Bán kính của mặt cầu là: $R = \dfrac{|-1+2.7-2.7-2|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} = 1$

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là:

$$(x+1)^2 + (y-7)^2 + (z-7)^2 = 1$$

Chú ý: Để ý rằng hai mặt phẳng đã cho là song song nên tâm mặt cầu là giao của đường thẳng đã cho và mặt phẳng song song cách đều hai mặt phẳng.

VÍ DỤ 4.2

Trong không gian với hệ tọa độ Đêcac trực chuẩn Oxyz, cho tứ diện ABCD với A(3; 2; 6), B(3; -1; 0), C(0; -7; 3), D(-2; 1; -1). Thiết lập phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

LỜI GIẢI

Phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD có dạng:

(S): $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$

Vì $A \in (S) \Rightarrow 49 + 6a + 4b + 12c + d = 0$ (1)

$B \in (S) \Rightarrow 10 + 6a - 2b + d = 0$ (2)

$C \in (S) \Rightarrow 58 - 14b + 6c + d = 0$ (3)

$D \in (S) \Rightarrow 6 - 4a + 2b - 2c + d = 0$ (4)

Giải hệ (1), (2), (3) và (4) ta được:

$$a = 1,\ b = \frac{3}{2},\ c = -4,\ d = -13$$

Vậy phương trình mặt cầu (S):

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 3y - 8z - 13 = 0$$

VÍ DỤ 4.3

Trong không gian với hệ tọa độ vuông góc Oxyz, cho đường tròn (C) xác định bởi hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 6z + 17 = 0 \\ x - 2y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

a) Tìm tọa độ của tâm và bán kính đường tròn (C).

b) Lập phương trình mặt cầu chứa đường tròn (C) và có tâm thuộc mặt phẳng: x + y + z + 3 = 0.

(ĐHQG Hà Nội, 1999)

LỜI GIẢI

Viết lại phương trình đường tròn (C) dưới dạng

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y+3)^2+(z+3)^2=5 & (1)\\ x-2y+2z+1=0 & (2)\end{cases}$$

a) Phương trình (1) xác định mặt cầu tâm I(2; -3; -3) bán kính $R = \sqrt{5}$.

Tâm J của (C) chính là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (P): $x - 2y + 2z + 1 = 0$, tức là giao của đường thẳng (d) qua I và vuông góc với P và mặt phẳng (P)

Phương trình đường thẳng (d):

$$\begin{cases}x = 2+t\\ y = -3-2t\\ z = -3+2t\end{cases} \qquad (t \in R)$$

Tọa độ của J có dạng: $J(2 + t,\ -3 - 2t,\ -3 + 2t)$

Vì $J \in (P)$ nên:

$(2 + t) - 2(-3 - 2t) + 2(-3 + 2t) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 9t + 3 = 0 \ \Leftrightarrow\ t = -\dfrac{1}{3}$

Vậy J có tọa độ $J\left(\dfrac{5}{3}; -\dfrac{7}{3}; -\dfrac{11}{3}\right)$ và bán kính của (C) là: $r = \sqrt{R^2 - IJ^2} = 2$

b. Phương trình mặt cầu (S) chứa (C) có dạng:

$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 17 + \lambda(x - 2y + 2z + 1) = 0\ (\lambda \in R)$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2\left(2 - \frac{\lambda}{2}\right)x - 2(\lambda - 3)y - 2(-3 - \lambda)z + (17 + \lambda) = 0$$

Do đó tâm của (S) là $K\left(2 - \frac{a}{2}; a - 3; -3 - a\right)$

Vì $K \in (P)$ nên: $2 - \frac{a}{2} + a - 6 - a + 3 = 0 \Leftrightarrow a = -2$

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là:

$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 10y + 2z + 15 = 0$

VÍ DỤ 4.4

Lập phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng

$$\begin{cases} 8x - 11y + 8z - 30 = 0 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases}$$

và tiếp xúc với mặt cầu: $x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 4z - 15 = 0$

LỜI GIẢI

Viết phương trình mặt cầu đã cho dưới dạng:

$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 2)^2 = 29$

(S) có tâm I $(-1; 3; 2)$ và bán kính $R = \sqrt{29}$

Để thấy được mặt phẳng $x - y - 2z = 0$ không tiếp xúc với mặt cầu (S). Do đó phương trình mặt phẳng (α) cần tìm có dạng:

$$8x - 11y + 8z - 30 + \lambda(x - y - 2z) = 0$$

$$\Leftrightarrow (8 + \lambda)x - (11 + \lambda) + (8 + 2\lambda)z - 30 = 0$$

(α) tiếp xúc (S) $\Leftrightarrow d(I, (\alpha)) = R$

$$\Leftrightarrow \frac{|8 - \lambda - 33 - 3\lambda - 16 + 4\lambda - 30|}{\sqrt{(8+\lambda)^2 + (11+\lambda)^2 + (8 - 2\lambda)^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{87}{\sqrt{6\lambda^2+6\lambda+249}}=\sqrt{29} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2+\lambda-2=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\lambda=1\\ \lambda=-2\end{array}\right.$$

Với $\lambda = 1$, ta được: $3x - 4y + 2z - 10 = 0$

$\lambda = -2$, ta được: $2x - 3y + 4z - 10 = 0$

Vậy có hai mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu đề bài.

VÍ DỤ 4.5

Trong không gian cho hai mặt cầu:

(S_1): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$

(S_2): $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - x + 2y - 2z - 2 = 0$

a. Viết phương trình đường thẳng nối tâm I_1 và I_2 của (S_1) và (S_2).

b. Chứng tỏ rằng hai mặt cầu (S_1) và (S_2) cắt nhau.

c. Viết phương trình mặt phẳng chứa giao tuyến.

LỜI GIẢI

a. Viết phương trình của (S_1) và (S_2) dưới dạng

(S_1): $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 1)^2 = 9$

(S_2): $\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\left(y\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{16}$

Mặt cầu (S_1) có tâm $I_1(1; -2; -1)$, bán kính $R_1 = 3$

Mặt cầu (S_2) có tâm $I_2\left(\frac{1}{4};-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, bán kính $R_2 = \frac{5}{4}$

Ta có $\overrightarrow{I_2I_1}=\left(\frac{3}{4};-\frac{5}{2};-\frac{3}{2}\right)$

Đường nối tâm I_1I_2 đi qua $I_1(1; -2; -1)$ và nhận $\overrightarrow{I_2I_1}$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình:

$$\frac{x-1}{\frac{3}{4}} = \frac{2+2}{-\frac{5}{2}} = \frac{z+1}{-\frac{3}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(x-1)}{3} = \frac{-4(y+2)}{10} = \frac{-4(z+1)}{6}$$

b. Ta có: $|R_1 - R_2| = \left|3 - \frac{5}{4}\right| = \frac{7}{4}$

$$I_2I_1 = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{25}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{145}}{4}$$

$$R_1 + R_2 = 3 + \frac{5}{4} = \frac{17}{4}$$

Vì $|R_1 - R_2| < I_1I_2 < R_1 + R_2$ nên (S_1) cắt nhau.

c. Hai mặt cầu cắt nhau theo giao tuyến là một đường tròn. Phương trình đường tròn này là:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0 \\ 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - x + 2y - 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2z + 4y + 2z - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - \frac{1}{2}x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - \frac{1}{2}x + y - z - 1 - \left(x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0 \\ 3x + 6y - 6z - 4 = 0 \end{cases}$$

Vậy giao tuyến của (S_1) và (S_2) cũng chính là giao tuyến của (S_1) và mặt phẳng (α): $3x + 6y - 6z - 4 = 0$

Vậy phương trình mặt phẳng chứa giao tuyến chính là:

$3x + 6y - 6z - 4 = 0$

BÀI TẬP

1. Trong hệ tọ độ Đêcac Oxyz cho mặt phẳng:

(P): $16x - 15y - 12z + 75 = 0$

a) Lập phương trình mặt cầu (S) tâm gốc độ O, tiếp xúc với mặt phẳng (P).

b) Tìm tọa độ tiếp điểm H của mặt phẳng (P) với mặt cầu (S).

c) Tìm điểm đối xứng của gốc tọa độ O qua mặt phẳng (P).

(ĐH GTVT, 1999)

2. Cho đường thẳng (d): $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$ và hai mặt phẳng

(P): $x = y - 2z + 5 = 0$

(Q): $2x - y + z + 2 = 0$

a) Gọi A và B là giao điểm của (d) với (P) và (Q).

Tính AB

b) Viết phương trình mặt cầu có tâm thuộc (d) và tiếp xúc với P), (Q).

3. Cho A (a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c) $(a, b, c > 0)$

a) Chứng minh ΔABC có ba góc nhọn

b) Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện OABC.

c) Tìm tọa độ điểm O' đối xứng với O qua mặt phẳng (ABC).

4. Trong hệ tọa độ trực chuẩn Oxyz, cho đường thẳng

(d): $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z}{1}$ và mặt phẳng (P): $2x + y - 2z + 2 = 0$

a) Lập phương trình mặt cầu (C) có tâm nằm trên đường thẳng (d), tiếp xúc với mặt phẳng (P) và có bán kính bằng 1.

b) Gọi M là giao điểm của mặt phẳng (P) với đường thẳng (d). T là tiếp điểm của mặt cầu (C) với mặt phẳng (P).

Tính MT?

(ĐH Nông Nghiệp I, 1999)

5. a) Lập phương trình mặt cầu (S) tâm I(2; 3; -1) và cắt đường thẳng (d):

$\begin{cases}5x-4y+3z+20=0\\3x-4y+z-8=0\end{cases}$ tại A và B sao cho độ dài đoạn AB = 16

b) Lập phương trình tiếp diện của mặt cầu (S) tại A và B.

6. Xác định tọa độ của tâm và bán kính của đường tròn trong không gian Oxyz như sau:

$$(C): \begin{cases}x^2+y^2+z^2-2(x+y+z)-22=0\\3x-2y+6z+14=0\end{cases}$$

7. Trong gian với hệ tọa độ trực chuẩn Oxyz, cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ và mặt phẳng (P): $x + z = 2$.

a) Chứng minh rằng mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S). Xác định tọa độ tâm và bán kính của đường tròn (C) là giao tuyến giữa (P) và (S).

b) Viết phương trình đường cong (C_1) trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

(ĐH Thủy Lợi, 2000)

CHỦ ĐỀ III

CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN HÌNH HỌC

§1. PHƯƠNG PHÁP VÉCTƠ

Dùng phương pháp vectơ, chúng ta có thể giải nhanh gọn một số bài toán hình học. Dưới đây là một số gợi ý về phương pháp:

1. Muốn chứng minh hai đường thẳng phân biệt AB và CD là song song, ta chỉ cần chứng minh hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ và cùng phương, tức là chứng minh: $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$.

2. Muốn chứng minh 3 điểm A, B, C thẳng hàng, ta chứng minh hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng phương, tức là $\overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{CD}$

Ta cũng có thể chọn một điểm O nào đó rồi chứng minh

$$\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OA} + l\overrightarrow{OB}, \quad \text{trong đó } k + l = 1$$

3. Muốn chứng minh đường thẳng a có vectơ chỉ phương $\vec{a}$ song song hoặc nằm trên mặt phẳng (P), ta lấy trong (P) hai vectơ $\vec{m}$, $\vec{n}$ không cùng phương rồi chứng minh 3 vectơ $\vec{a}, \vec{m}, \vec{n}$ đồng phẳng, tức là:

$$\vec{a} = k.\vec{m} + l.\vec{m}$$

Sau đó tuỳ theo đường thẳng a có điểm chung với mặt phẳng (P) hay không, ta kết luận: $a \subset (P)$ hay $a // (P)$.

4. Muốn chứng minh 4 điểm A, B, C, D cùng nằm trong một mặt phẳng, ta chứng minh 3 vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ đồng phẳng, tức là:

$$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} + l\overrightarrow{AD}$$

Hoặc bằng cách khác, ta có thể chọn một điểm O nào đó rồi chứng minh: $\overrightarrow{OA} = k\overrightarrow{OB} + l\overrightarrow{OC} + m\overrightarrow{OD}$, trong đó k + l + m = 1

5. Muốn chứng minh G là trọng tâm của ΔABC, ta chứng minh:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$$

hoặc là với một điểm O nào đó ta có:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$$

Trong không gian muốn chứng minh G là trọng tâm của tứ diện ABCD ta chứng minh:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 0$$

hoặc là với một điểm O nào đó ta có:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)$$

6. Muốn chứng minh 2 đường thẳng AB và CD vuông góc với nhau, ta chứng minh:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$$

Quy trình giải một bài toán hình học bằng phương pháp vectơ:

- Chọn 3 vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng nào đó làm cơ sở để biểu thị các vectơ còn lại theo 3 vectơ đó. việc lựa chọn này tuỳ theo tình hình cụ thể từng bài.

- Chuyển các giả thiết và kết luận của bài toán từ ngôn ngữ hình học sang ngôn ngữ vectơ.

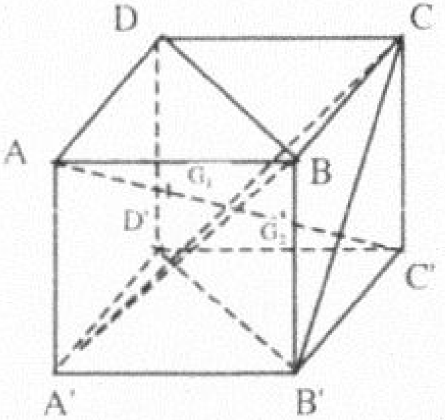
Sau đó bằng các phép tính vectơ, ta có chuyển giả thiết thành kết luận.

VÍ DỤ 1.1

Cho hình hộp ABCD. A'B'C'D'. Chứng minh rằng đường chéo AC' của hình hộp đi qua trọng tâm G_1, G_2 của các tam giác A'BD và B'D'C, đồng thời G_1, G_2 chia đoạn AC' thành ba phần bằng nhau.

LỜI GIẢI

Vì G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của tam giác A'BD và B'D'C nên ta có:



$$3\overrightarrow{AG_1} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\ .$$

$$= \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \qquad (1)$$

Tương tự: $3\overrightarrow{C'}G_2 = \overrightarrow{C'A}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra G_1, G_2 thuộc đường chéo AC' và G_1, G_2 chia đoạn AC' thành 3 đoạn bằng nhau.

VÍ DỤ 1.2

a) Cho tứ diện ABCD có AB = BC, AD = DC, chứng minh AC ⊥ BD.

b) Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tứ diện ABCD có AB ⊥ CD là: $AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2$

LỜI GIẢI

a. Chọn các vectơ cơ sở: $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$

Ta có: $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD} = \vec{c} - \vec{b}$

$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BD} = \vec{a} - \vec{b}$

Từ giả thiết, ta có:

$AB = BC \Rightarrow |\vec{a}| = |\vec{c}| \Rightarrow \vec{a}^2 = \vec{c}^2$

$AD = DC \Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{c} - \vec{b}| \Rightarrow \left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2 = \left(\vec{c} - \vec{b}\right)^2$

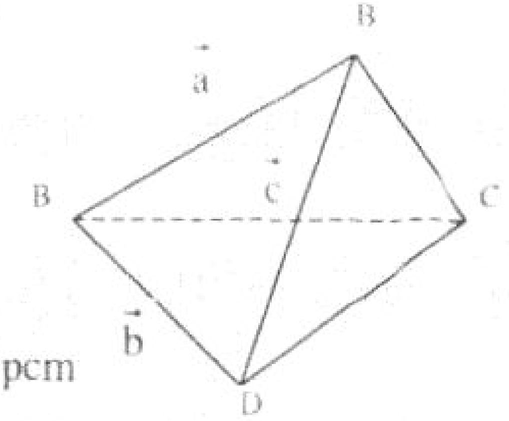
$\Leftrightarrow \overrightarrow{a^2} + \overrightarrow{b^2} - 2\vec{a}.\vec{b} = \overrightarrow{c^2} + \overrightarrow{b^2} - 2\vec{b}.\vec{c}$

$\Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{c}$ (vì $\overrightarrow{a^2} = \overrightarrow{c^2}$)

$\Leftrightarrow \vec{b}\left(\vec{a} - \vec{c}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BD}\left(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{CA} = 0 \quad \Leftrightarrow BD \perp CA$ (đpcm



b. Ta có: $AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AC^2} - \overrightarrow{AD^2}\right) - \left(\overrightarrow{BC^2} - \overrightarrow{BD^2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right) - \left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD}\right)\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DC}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right) - \overrightarrow{DC}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DC}\left[\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD}\right] = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DC}\left[\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) + \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}\right)\right] = 0$

$\Leftrightarrow 2.\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB} = 0 \quad \Leftrightarrow DC \perp AB$ (đpcm).

VÍ DỤ 1.3

Cho hình lập phương ABCD A'B'C'D' cạnh a. Tìm khoảng cách giữa hai đường chéo AC và A'B

LỜI GIẢI

Chọn các vectơ cơ sở: $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$, ta có:

$\overrightarrow{a^2} = \overrightarrow{b^2} = \overrightarrow{c^2}$

$\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{c} = \vec{c}.\vec{a} = 0$

Ta có: $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{A'B} = \vec{a} - \vec{c}$

Giả sử M ∈ AC; N ∈ AB, ta có:

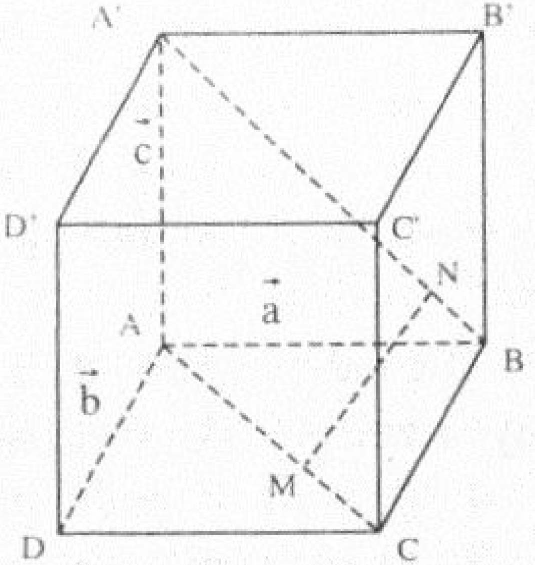
$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$$

$$= -x.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{BA'}$$

$$= -x\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{a} + y\left(\vec{c} - \vec{a}\right) = (1 - x - y)\vec{a} - x\vec{b} - y\vec{c}$$

MN là đường vuông góc chung của AC và A'B

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{A'B} = 0 \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[(1 - x - y)\vec{a} - x\vec{b} - y\vec{c}\right]\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = 0 \\ \left[(1 - x - y)\vec{a} - x\vec{b} - y\vec{c}\right]\left(\vec{c} + \vec{a}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1 - x - y)a^2 - xa^2 = 0 \\ ya^2 - (1 - x - y)a^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2x - y = 0 \\ -1 + x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{3}$$

Suy ra: $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\left(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}\right)$

Do đó $\overrightarrow{MN}^2 = \frac{1}{9}\left(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}\right)^2 = \frac{a^2}{3}$

Vậy $MN = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

VÍ DỤ 1.4

Cho tứ diện ABCD; P, Q là trung điểm của các cạnh AB và CD; R và S là 2 điểm nằm trên 2 cạnh AC và BD. Sao cho $\frac{AR}{RC} = \frac{BS}{SD}$. *Chứng minh rằng 4 điểm P, Q, R, S cùng nằm trên một mặt phẳng.*

LỜI GIẢI

Vì $\frac{AR}{RC} = \frac{BS}{SD}$ nên $\frac{AR}{AC} = \frac{BS}{BD}$.

Từ đó suy ra: $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AR}$, $\overrightarrow{BD} = k.\overrightarrow{BS}$

Ta có: $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right) = \frac{k}{2}\left(\overrightarrow{AR} + \overrightarrow{BS}\right)$

$$= \frac{k}{2}\left[\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AR}\right) + \left(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BS}\right)\right]$$

$$= \frac{k}{2}\left(\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PS}\right)$$

Hệ thức này chứng tỏ 3 vectơ $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{PS}$ đồng phẳng. Từ đó suy ra 4 điểm P, Q, R, S nằm trên một mặt phẳng.

VÍ DỤ 1.5

Cho hình chóp S.ABC, G là trọng tâm của ΔABC. Một mặt phẳng (P) cắt các tia SA, SB, SC, SG theo thứ tự A', B', C, G'. Chứng minh rằng:

$$\frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} = 3\frac{SG}{SG'}$$

LỜI GIẢI

Đặt $\frac{SA}{SA'} = a$; $\frac{SB}{SB'} = b$; $\frac{SC}{SC'} = c$; $\frac{SG}{SG'} = t$.

Ta phải chứng minh a + b + c = 3t

Ta có : $\overrightarrow{SA} = a.\overrightarrow{SA'}$; $\overrightarrow{SB} = b.\overrightarrow{SB'}$; $\overrightarrow{SC} = c.\overrightarrow{SC'}$; $\overrightarrow{SG} = t.\overrightarrow{SG'}$

Vì G là trọng tâm của ΔABC nên:

$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = 3\overrightarrow{SG}$

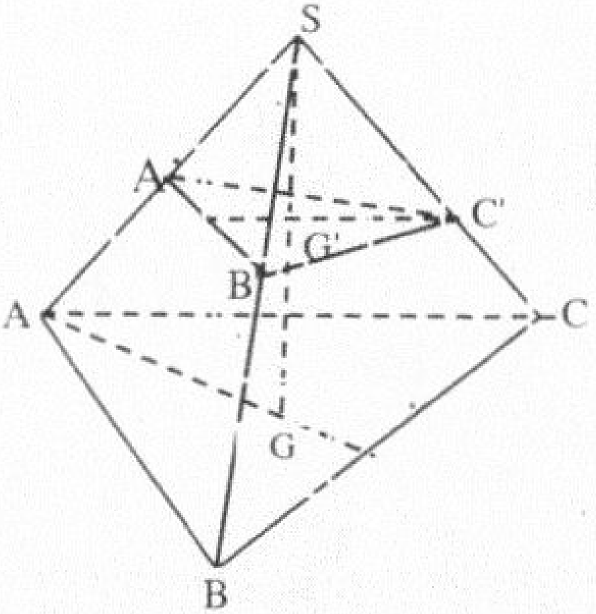
$\Leftrightarrow$ a. $\overrightarrow{SA'}$ + b. $\overrightarrow{SB'}$ + c. $\overrightarrow{SG'}$ = 31 $\overrightarrow{SG'}$.

Mặt khác, 4 điểm A', B', C', G' đồng phẳng nên:

$\overrightarrow{SG'}$ = p. $\overrightarrow{SA'}$ + q. $\overrightarrow{SB'}$ + r. $\overrightarrow{SC'}$

với p + q + r = 1.

Do đó:



a. $\overrightarrow{SA'}$ + b. $\overrightarrow{SB'}$ + c. $\overrightarrow{SC'}$

= 3t (p. $\overrightarrow{SA'}$ + q. $\overrightarrow{SB'}$ + r. $\overrightarrow{SC'}$)

Vì $\overrightarrow{SA'}$, $\overrightarrow{SB'}$, $\overrightarrow{SC'}$ không đồng phẳng, nên suy ra:

$\begin{cases} a = 3t\,p \\ b = 3t\,q \\ c = 3t\,r \end{cases} \Rightarrow 3\ (a + b +$

c) = 3t (p + q + r) = 3t

Vậy $\dfrac{SA}{SA'} + \dfrac{SB}{SB'} + \dfrac{SC}{SC'} = 3\dfrac{SG}{SG'}$ (đpcm).

VÍ DỤ 1.6

Cho hình hộp ABCD. A'B'C'D'. Tìm điểm M thuộc đoạn AC và điểm N thuộc đoạn C'D sao cho MN song song với BD'.

LỜI GIẢI

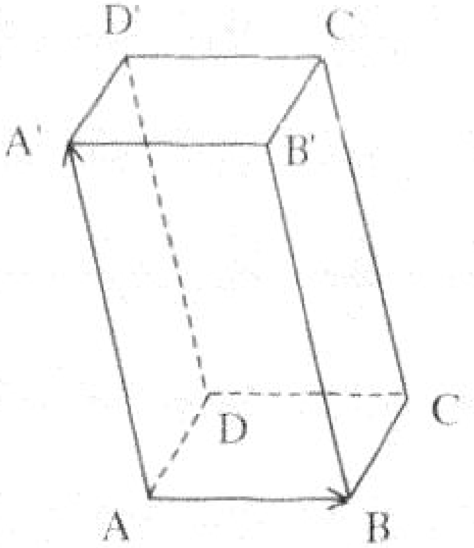
Đặt $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BB'} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$.

Ta có: $\overrightarrow{BD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'N} = n\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC'} + m\overrightarrow{C'D}$$

$$= n(\vec{c} - \vec{a}) + \vec{b} + m(\vec{a} - \vec{b})$$

$$= (m - n)\vec{a} + (1 - m)\vec{b} + n\vec{c}$$



MN//BD' ⇔ $\overrightarrow{MN} = k.\overrightarrow{BD'}$

$$\Leftrightarrow (m - n)\vec{a} + (1 - m)\vec{b} + n\vec{c} =$$

$$= k.\vec{a} + k.\vec{b} + k.\vec{c}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m - n = k \\ 1 - m = k \\ n = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \dfrac{2}{3} \\ n = \dfrac{1}{3} \\ k = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy các điểm M thuộc đoạn AC và N thuộc đoạn C'D cần tìm xác định bởi: $\overrightarrow{MC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{C'N} = \frac{2}{3}\overrightarrow{C'D}$.

Khi đó $\dfrac{MN}{BD'} = \dfrac{1}{3}$

BÀI TẬP

1. Cho tứ diện đều ABCD cạnh a, gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CB, AD và G là trọng tâm của tam giác BCD, O là trung điểm của AG.

a) Chứng minh rằng OB, OC, OD vuông góc với nhau từng đôi một.

b) Tính góc giữa 2 đường thẳng MG và NP.

c) Chứng tỏ rằng 2 đường thẳng MG và NP chéo nhau.

2. Cho lăng trụ tam giác ABC. A'B'C' có độ dài cạnh bên bằng a.

Trên các cạnh bên AA', BB', CC' lấy các điểm M, N, P sao cho: AM + BN + CP = a.

Chứng minh rằng mặt phẳng (MNP) luôn luôn đi qua một điểm cố định.

3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là một hình bình hành. Một mặt phẳng cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại K, L, M, N.

Chứng minh rằng: $\frac{SA}{SK}+\frac{SC}{SM}=\frac{SB}{SL}+\frac{SD}{SN}$.

4. Cho tam gtiác ABC và tam giác $A_1B_1C_1$ có cùng trọng tâm G, gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC_1, BCA_1, CAB_1. Chứng minh rằng G là trọng tâm tam giác $G_1G_2G_3$.

5. Từ một điểm S nằm bên trong một mặt cầu cho trước ta dựng 3 đường thẳng a, b, c vuông góc với nhau từng đôi một tại S. Đường thẳng a cắt mặt cầu tại A và A'; đường thẳng b cắt mặt cầu tại B và B', đường thẳng c cắt mặt cầu tại C và C'. Gọi G là trọng tâm ΔABC.

a) Chứng minh đường thẳng SG vuông góc với mặt phẳng (A'B'C').

b) Tính độ dài đoạn SG theo SA, SB, SC.

6. Cho hình hộp ABCD. A'B'C'D' có góc BCD = 60^0

Chứng minh rằng: $C'B^2 + C'D^2 = C'A^2$

7. Cho tam giác ABC và G là trọng tâm. Gọi M là một điểm tùy ý trong không gian. Chứng minh rằng:

$$MG^2=\frac{1}{3}\left(MA^2+MB^2+MC^2\right)-\frac{1}{9}\left(AB^2+BC^2+CA^2\right)$$

8. Trong không gian cho hai tứ diện ABCD và A'B'C'D'. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của 2 tứ diện, chứng minh rằng: $GG'\le\frac{1}{4}(AA'+BB'+CC'+DD')$.

§2. PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ

Để giải toán hình học, ta có thể chọn một hệ trục tọa độ thích hợp. Khi đó mỗi đường thẳng, đường cong, mặt phẳng, mặt cong sẽ tương ứng một phương trình; mỗi điều kiện hình học sẽ tương ứng một điều kiện đại số... và bài toán hình học sẽ chuyển sang bài toán đại số.

Về nguyên tắc, phương pháp tọa độ có thể giải bất cứ một bài toán hình học nào và thường cho lời giải ngắn gọn và đẹp hơn. Tuy nhiên cũng có nhiều bài toán nếu ta dùng phương pháp tọa độ thì sẽ cồng kềnh, phức tạp. Vì vậy, việc chọn lựa phương pháp giải phải thật linh hoạt, tùy theo đầu bài toán đã cho.

Quy trình giải bài toán bằng phương pháp tọa độ:

- Chọn một hệ tọa độ thích hợp với đề toán sao cho việc xác định tọa độ các điểm, lập phương trình các đường, các mặt có trong đề toán được thực hiện một cách dễ dàng, nhanh chóng.

- Phiên dịch bài toán từ ngôn ngữ hình học sang ngôn ngữ tọa độ.

- Bằng phương pháp tọa độ và bằng các phép tính đại số, ta thực hiện các yêu cầu do nội dung bài toán đặt ra.

VÍ DỤ 2.1

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Các điểm M thuộc AD' và N thuộc DB sao cho $AM = DN = k$ $(0 < k < a\sqrt{2})$

a) Chứng minh rằng MN luôn song song với mặt phẳng $(A'D'BC)$ khi k biến thiên.

b) Tìm k để đoạn MN ngắn nhất.

c) Khi MN ngắn nhất, chứng minh rằng MN là đường vuông góc chung của AD' và DB, và MN song song với $A'C$.

LỜI GIẢI

Chọn hệ tọa độ như hình vẽ.

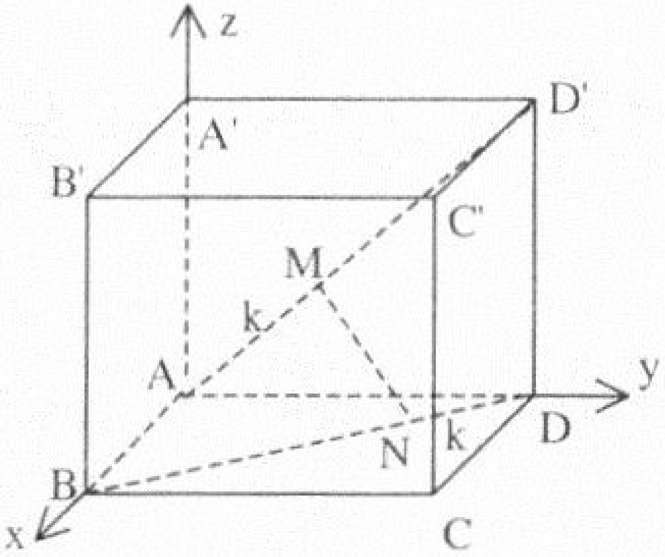
Khi đó $A = (0; 0; 0)$; $B = (a; 0; 0)$;

$C = (a; a; 0)$;

$D = (0; a; 0)$; $A' = (0; 0; a)$;

$B' = (a; 0; a)$; $C' = (a; a; a)$

$D' = (0; a; a)$.



Từ giả thiết suy ra:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{k}{a\sqrt{2}}.\overrightarrow{AD'}$$

$$\Rightarrow M = \left(0; \frac{k}{\sqrt{2}}; \frac{k}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\overrightarrow{DN} = \frac{k}{a\sqrt{2}}.\overrightarrow{DB} \quad \Rightarrow \quad N = \left(\frac{k}{\sqrt{2}}; \frac{a\sqrt{2}-k}{\sqrt{2}}; 0\right)$$

Do đó $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{k}{2}; \frac{a\sqrt{2}-2k}{\sqrt{2}}; \frac{-k}{\sqrt{2}}\right)$.

a. Véctơ pháp tuyến của mp(A'D'BC) là

$$\vec{n} = \frac{1}{a^2}\left[\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{A'D'}\right] = (-1; 0; -1)$$

Ta có $\vec{n}.\overrightarrow{MN} = (-1)\frac{k}{a\sqrt{2}} + 0.\frac{a\sqrt{2}-2k}{\sqrt{2}} + (-1)\frac{k}{a\sqrt{2}} = 0$.

Vậy đường thẳng MN//mp (A'D'BC)

b. Ta có:

$$MN^2 = \overrightarrow{MN}^2 = \left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2} - 2k}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{k}{\sqrt{2}}\right)^2 =$$

$$= 3k^2 - 2ka\sqrt{2} + a^2.$$

Do đó MN ngắn nhất $\Leftrightarrow f(b) = 3k^2 - 2ka\sqrt{2} + a^2$ bé nhất

$$\Leftrightarrow k = \frac{a\sqrt{2}}{3}.$$

Khi đó $MN^2 = f\left(\frac{a\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{a^2}{3} \Rightarrow MN_{min} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

c. Khi $k = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ thì $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{a}{3}; \frac{a}{3}; -\frac{a}{3}\right)$, ta có:

$$\overrightarrow{AD'}.\overrightarrow{MN} = 0.\frac{a}{3} + a\frac{a}{3} + a\left(-\frac{a}{3}\right) = 0 \Rightarrow AD' \perp MN.$$

$$\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{MN} = a.\frac{a}{3} + (-a)\frac{a}{3} + 0.\frac{a}{3} = 0 \Rightarrow DB \perp MN.$$

Vậy MN là đường vuông góc chung của AD' và DB.

Vectơ $\overrightarrow{A'C} = (a, a, -a) = 3\overrightarrow{MN} \Rightarrow A'C // MN$

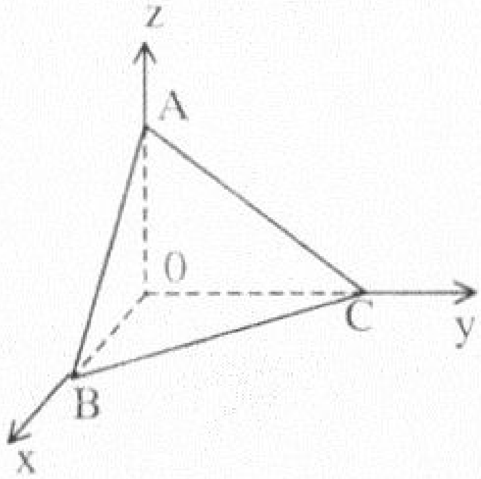
VÍ DỤ 2.2

Cho tứ diện OABC có các tam giác OAB, OBC, OCA đều là tam giác vuông tại đỉnh O, OA = a, OB = b, OC = c (a, b, c, > 0). Gọi α, β, γ là góc lần lượt hợp bởi các mặt phẳng (OBC), (OCA), (OAB) với mặt phẳng (ABC). Chứng minh rằng:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

LỜI GIẢI

Chọn hệ toạ độ như hình bên.



Khi đó: $O = (0;\ 0;\ 0)$; $A(0;\ 0;\ a)$;
$B = (b;\ 0;\ 0)$; $C(0;\ c;\ 0)$.

Vectơ pháp tuyến của mp (ABC) là:

$$\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (ac, ab, bc).$$

Vectơ pháp tuyến của mp (OBC) là:

$$\overrightarrow{n_1} = \left[\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right] = (0; 0;\ bc).$$

Vectơ pháp tuyến của mp (OCA) là:

$$\overrightarrow{n_2} = \left[\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}\right] = (ac; 0;\ 0).$$

Vectơ pháp tuyến của mp (OAB) là:

$$\overrightarrow{n_3} = \left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right] = (0; ab;\ 0)$$

$$\text{Vậy: } \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \left(\frac{\vec{n}.\overrightarrow{n_2}}{\left|\vec{n}\right|.\left|\overrightarrow{n_1}\right|}\right)^2 + \left(\frac{\vec{n}.\overrightarrow{n_2}}{\left|\vec{n}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|}\right)^2 + \left(\frac{\vec{n}.\overrightarrow{n_3}}{\left|\vec{n}\right|.\left|\overrightarrow{n_3}\right|}\right)^2$$

$$= \left(\frac{b^2c^2}{\sqrt{a^2c^2 + b^2c^2 + c^2a^2}\sqrt{b^2c^2}}\right)^2 + \left(\frac{a^2c^2}{\sqrt{a^2c^2 + b^2c^2 + c^2a^2}\sqrt{a^2c^2}}\right)^2 +$$

$$+ \left(\frac{a^2b^2}{\sqrt{a^2c^2 + b^2c^2 + a^2c^2}\sqrt{a^2b^2}}\right)^2 = 1 \quad \text{(đpcm).}$$

VÍ DỤ 2.3

Cho hình hộp chữ nhật ABCD. A'B'C'D' có AB = a, BC = b, CC' = c.

a) Tính khoảng cách từ B tới mp (ACC'A')

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và CD'

LỜI GIẢI

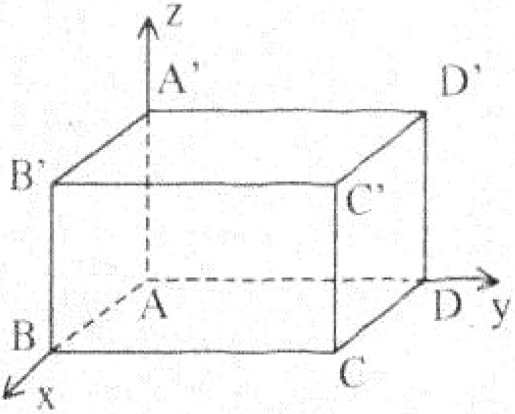
Chọn hệ toạ độ như hình vẽ.

Khi đó:

$A = (0,0,0)$; $B = (a,0,0)$; $C = (a,b,0)$;

$D = (0,b,0)$; $A' = (0,0,C)$; $B' = (a,0,c)$;

$C' = (a,b,c)$.



a. Phương trình mp(ACC'A') là:

$$\vec{n} = \left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA'}\right] = (bc; -ac; 0).$$

Phương trình mp(ACC'A') là:

$bc(x - 0) - ac(y - 0) + 0(z - 0) = 0$

$\Leftrightarrow bx - ay = 0.$

Khoảng cách từ B tới mp(ACC'A') là:

$$\frac{|ba - ao|}{\sqrt{b^2 + a^2}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

b. Vì CD' // (A'BD) nên khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau BD, CD' bằng khoảng cách từ điểm C đến mp (A'BD).

Mặt phẳng (A'BD) có phương trình:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Do đó: d(CD', BD) = d(C, (A'BD)) =

$$= \frac{|1 + 1 + 0 - 1|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} = \frac{abc}{\sqrt{a^2c^2 + a^2b^2 + b^2c^2}}.$$

VÍ DỤ 2.4

Cho góc tam diện ba mặt vuông Oxyz. Trên Oz cho điểm C cố định với OC = a, A di chuyển trên Ox, B di chuyển trên Oy. Đặt OA = m, OB = n. Giả sử m + n = a. Gọi I là tâm mặt cầu bán kính $\frac{a}{2}$, tiếp xúc với cả 3 mặt của góc tam diện. Chứng minh rằng mặt phẳng ABC luôn luôn tiếp xúc với mặt cầu cố định tâm I.

LỜI GIẢI

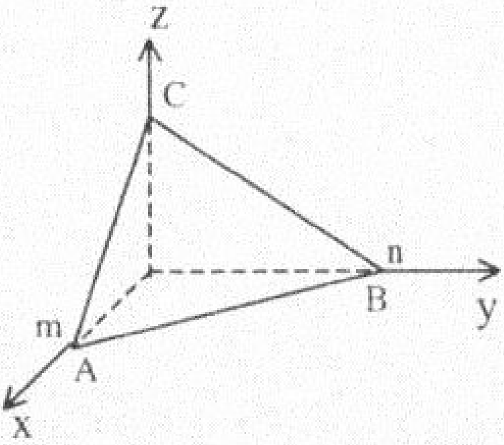
Chọn hệ toạ độ Oxyz như hình vẽ

Mặt phẳng ABC có phương trình:

$$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}+\frac{z}{a}=1.$$

Rõ ràng I có toạ độ $\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$.

Gọi d là khoảng cách từ I đến mp(ABC), ta chỉ cần chứng minh $d=\frac{a}{2}$.



Ta có: $$d=\frac{\left|\frac{a}{2}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{a}\right)-1\right|}{\sqrt{\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{a^2}}}$$

$$\left|\frac{a}{2}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{a}\right)-1\right|=\frac{\left|a^2+amn-2amn\right|}{2amn}=$$

$$=\frac{a\left|a^2-mn\right|}{2amn}\sqrt{\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{a^2}}=\sqrt{\frac{a^2\left(m^2+n^2\right)+m^2n^2}{a^2m^2n^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2\left(a^2 - 2mn\right) + m^2n^2}}{amn} = \frac{\left|a^2 - mn\right|}{amn} \quad \text{(vì } a = m + n\text{)}.$$

Vậy $d = \frac{a}{2}$ (đpcm).

BÀI TẬP

1. Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D' có cạnh bằng a.

a) Chứng minh rằng đường chéo A'C vuông góc với mp(AB'D').

b) Chứng minh rằng giao điểm của đường chéo A'C và mp(AB'D) là trọng tâm của tam giác AB'D'.

c) Tìm khoảng cách giữa 2 mp(DA'C') và mp(ABB'A').

2. Cho tứ diện OABC, có các cạnh OA = a, OB = b; OC = c. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để 2 mặt phẳng (OMN) và (OMP) vuông góc với nhau là: $\frac{1}{c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$.

3. Cho tứ diện SABC có 3 góc vuông tại đỉnh S và có SA = a; SB = b; SC = c. Gọi D là điểm nằm trên mặt đáy ABC và cách đều 3 mặt còn lại của tứ diện. Tính độ dài đoạn SD và chiều cao SH của tứ diện.

4. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có đáy là hình vuông cạnh 2a, cạnh AA' = a. Gọi M là trung điểm của đoạn AB, N là điểm thuộc cạnh AD sao cho $AN = \frac{2}{5}AD$. Hãy xác định vị trí điểm P trên đường thẳng AA' sao cho mặt phẳng (PMN) vuông góc với mặt phẳng (A'DB).

5. Cho hình hộp chữ nhật ABCDA'B'C'D' có AB = a, AD = 2a, AA' = a$\sqrt{2}$; M là điểm thuộc đoạn AD. K là trung điểm của B'M.

a) Đặt AM = m ($0 \le m < 2a$). Tính thể tích khối tứ diện A'KID theo a và m, trong đó I là tâm của hình hộp. Tìm vị trí của M để thể tích đó đạt giá trị lớn nhất.

b) Khi M là trung điểm của AD.

- Hỏi thiết diện của hình hộp cắt bởi mp(B'CK) là hình gì? Tính diện tích thiết diện đó theo a.

- Chứng minh rằng đường thẳng B'M tiếp xúc với mặt cầu đường kính AA'.

(ĐHSP Hà Nội, 2001)

6. Cho hình hộp chữ nhật ABCDA'B'C'D' có AB = a, AD = 2a, AA' = a.

a) Tính khoản cách giữa 2 đường thẳng AD' và B'C.

b) Gọi M là điểm chia trong đoạn AD theo tỷ số $\dfrac{AM}{MD} = 3$.

Hãy tính khoảng cách từ điểm M đến mp(AB'C).

c) Tính thể tích tứ diện AB'D'C.

(HVCNBCVT, 2001)

7. Cho tam diện vuông Oxyz . Trên Ox, Oy, Oz lấy lần lượt các điểm A, B, C có OA = a; OB = b; OC = c (a, b, c > 0).

a) Chứng minh rằng tam giác ABC có 3 góc nhọn.

b) Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Hãy tính OH theo a, b, c.

c) Chứng minh rằng bình phương diện tích tam giác ABC bằng tổng bình phương diện tích các mặt còn lại của tứ diện OABC.

(ĐH An ninh, 2001)

8. Cho hình lập phương ABCD $A_1B_1C_1D_1$. Biết bán kính hình cầu nội tiếp trong tứ diện ACB_1D_1 là r, tính diện tích toàn phần của tứ diện ACB_1D_1 và thể tích hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

(ĐH Y Thái Bình, 2001)

9. Cho tứ diện SABC có SC = CA = AB = $a\sqrt{a}$, SC $\perp$(ABC), tam giác ABC vuông tại A, các điểm M thuộc SA và N thuộc BC sao cho AM = CN = t ($0 < t < 2a$).

a) Tính độ dài đoạn thẳng MN.

b) Tìm giá trị của t để đoạn MN ngắn nhất.

c) Khi đoạn thẳng MN ngắn nhất, chứng minh MN là đường vuông góc chung của SC và SA.

(ĐH Đà Nẵng, 2001)

10. Cho tứ diện OABC có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và OA = OB = OC = a, kí hiệu K, M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CA. Gọi E là điểm đối xứng của O qua k và I là giao điểm của CE với mặt phẳng (OMN).

a) Chứng minh CE vuông góc với mặt phẳng (OMN).

b) Tính diện tích của tứ giác OMIN theo a.

(ĐH Huế, 2001)

11. Cho hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$, có các cạnh bên AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 và độ dài cạnh AB = a, cho các điểm M, N trên cạnh CC_1 sao cho $CM = MN = NC_1$. Xét mặt cầu (k) đi qua 4 điểm A, B_1, M, N.

a) Chứng minh rằng các đỉnh A_1 và B thuộc mặt cầu (k).

b) Hãy tính độ dài của bán kính mặt cầu (k) theo a.

(ĐH An Giang, 2001)

12. Cho hình chóp tứ giác SABCD, đỉnh S mà cả 8 cạnh đều bằng $a\sqrt{2}$ ($a > 0$)

a) Chứng minh rằng SABCD là hình chóp tứ giác đều có chiều cao bằng a.

b) Chọn hệ toạ độ Đề các vuông góc Oxyz, trong không gian sao cho O là tâm của hình vuông ABCD, OA là trục hoành, OB là trục tung. Tính toạ độ các đỉnh của hình chóp (biết rằng các toạ độ của A, B, S đều ≥ 0) và viết phương trình mặt phẳng đi qua A, B, S.

c) Tìm toạ độ các điểm I trên đường thẳng SO, cách đều mặt phẳng đáy và mặt bên (SAB) của chóp.

(ĐH Thăng Long, 2001)

§3. PHƯƠNG PHÁP TỔNG HỢP

Để giải toán hình học bằng phương pháp tổng hợp (còn gọi là phương pháp tiên đề), các bạn cần nắm vững các khái niệm và định lý của hình học không gian lớp 11. Đồng thời các bạn cũng cần nắm vững cách giải quyết những bài toán cơ bản sau:

- Xác định giao tuyến của 2 mặt phẳng. Tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng.

- Chứng minh nhiều điểm thẳng hàng, nhiều đường thẳng đồng quy.

- Chứng minh 2 đường thẳng song song, đường thẳng song song với mặt phẳng, hai mặt phẳng song song.

- Chứng minh hai đường thẳng vuông góc, đường thẳng vuông góc với mặt phẳng, hai mặt phẳng vuông góc.

- Xác định đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau.

- Chứng minh nhiều điểm cùng thuộc một mặt cầu.

Ngoài ra các bạn các cần nắm vững các công thức tính diện tích, thể tích của các vật thể hình học để phục vụ cho các bài toán tính toán.

Phân tích kỹ giả thiết và kết luận để từ đó rút ra mối quan hệ giữa chúng là điểm mấu chốt trong chứng minh hình học. Ngoài ra, một hình vẽ tốt cũng giúp ích rất nhiều khi ta chứng minh bài toán. Vì vậy các bạn cũng cần rèn luyện cách vẽ hình chính xác, sáng sủa.

Sau đây ta xét một số ví dụ minh hoạ.

VÍ DỤ 3.1

Cho tứ diện ABCD, một mặt phẳng (α) song song với AD và BC cắt các cạnh AB, AC, CD, DB lần lượt tại M, N, P, Q.

b) Xác định vị trí của (α) để cho tứ diện của tứ giác MNPQ đạt giá trị lớn nhất.

(ĐH Vinh, 1999)

LỜI GIẢI

a. Vì (α) // AD nên MQ = (α) ∩ (ABD) và NP = (α) ∩ (ACD) song song với giao tuyến AD = (ABD) ∩ (ACD), nghĩa là MQ // NP (// AD)

Tương tự ta chứng minh được

MN // PQ (// BC)

Vậy tứ giác MNPQ là hình bình hành.

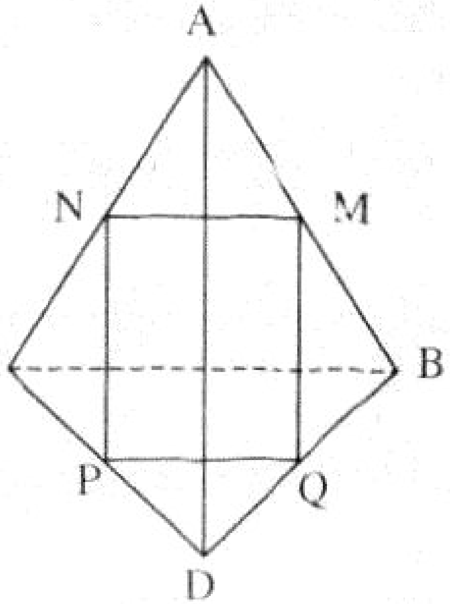
b. Gọi φ là góc giữa AD và BC thì

dt(MNPQ) = MN.MQ sin φ.

Ta có:

$$\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow MN = \frac{BC.AM}{AB},$$

$$\frac{MQ}{AD} = \frac{BM}{BH} \Rightarrow MQ = \frac{AD.MB}{AB}.$$



Do đó:

$$MN.MQ = \frac{BC.AM}{AB}.\frac{AD.MB}{AB} = \frac{BC.AD}{AB^2}\ (AM.MB)$$

$$\le \frac{BC.AD}{AB^2}\left(\frac{AM+MB}{2}\right)^2 = \frac{BC.AD}{AB^2}.AB^2 = BC.AD.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow AM = BM = \dfrac{AB}{2}$.

Vậy diện tích tứ giác MNPQ đạt giá trị lớn nhất khi mặt phẳng (α) đi qua trung điểm M, N, P, Q của các cạnh AB, AC, CD, DB.

VÍ DỤ 3.2

Trong mặt phẳng (α) cho đường tròn (T) đường kính AB = 2R. Gọi C là một điểm di động trên T. Trên đường thẳng d qua A và vuông góc với mặt phẳng (α) lấy điểm S sao cho SA = R; Hạ AH $\perp$ SB, AK $\perp$ SC.

a) Chứng minh AK $\perp$ SBC, SB $\perp$ (AHK).

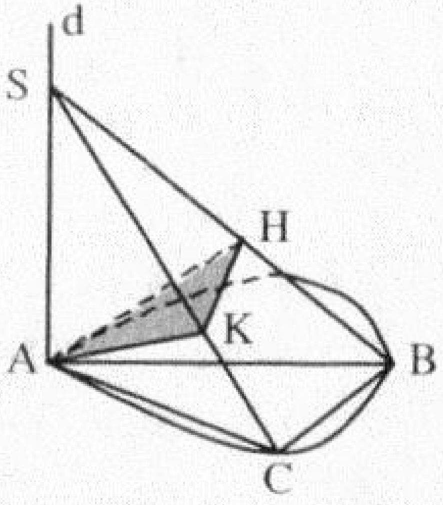
b) Tìm quỹ tích điểm K khi C thay đổi. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích tứ diện SAHK.

LỜI GIẢI

a. Ta có:

$$\left.\begin{matrix} BC\perp AC \\ BC\perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC\perp(SAC) \Rightarrow BC\perp AK$$

$$\left.\begin{matrix} AK\perp BC \\ AK\perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow AK\perp(SBC) \Rightarrow AK\perp SB;$$



Từ $\left.\begin{matrix} AK\perp BC \\ AK\perp SB \end{matrix}\right\} \Rightarrow AK\perp(SBC).$

Mặt khác: $\left.\begin{matrix} SB \perp AK \\ SB \perp AH \end{matrix}\right\} \Rightarrow SB \perp (AHK)$.

b. mp(AHK) ⊥ SB nên mp(AHK) cố định, điểm K luôn nhìn đoạn AH cố định dưới một góc vuông nên quỹ tích K là đường tròn đường kính AH, nằm trong mặt phẳng qua A và vuông góc với SB.

Tứ diện SAHK có chiều cao SH cố định nên sẽ có diện tích lớn nhất khi diện tích đáy AHK lớn nhất. Tam giác AHK nội tiếp trong đường tròn cố định có đường kính AH nên có diện tích lớn nhất khi K là trung điểm nửa cung tròn đường kính AH (có 2 vị trí của K trên đường tròn) ta có:

$$AB^2 = SA^2 + AB^2 = R^2 + 4R^2 = 5R^2 \Rightarrow SB = R\sqrt{5}$$

$$AH.SB = SA.AB \Rightarrow AH = \frac{SA.AB}{SB} = \frac{R.2R}{R\sqrt{5}} = \frac{2R}{\sqrt{5}}$$

$$SA^2 = SH.SB \Rightarrow SH = \frac{SA^2}{SB} = \frac{R^2}{R\sqrt{5}} = \frac{R}{\sqrt{5}}.$$

Do đó:

$$\text{Max}(V_{SNK}) = \frac{1}{3}SH.\max(S_{\Delta AHK})$$

$$= \frac{1}{3}SH\left(\frac{AH}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}.\frac{R}{\sqrt{5}}\left(\frac{2R}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{R^3\sqrt{5}}{75}$$

VÍ DỤ 3.3

Cho tứ diện ABCD có AB = BC = CA = DB = $a\sqrt{2}$, *CD = 2a*

a) Chứng minh rằng AB vuông góc với CD. Hãy xác định đường vuông góc chung của AB và CD.

b) Tính thể tích tứ diện ABCD.

c) Xác định tâm I của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

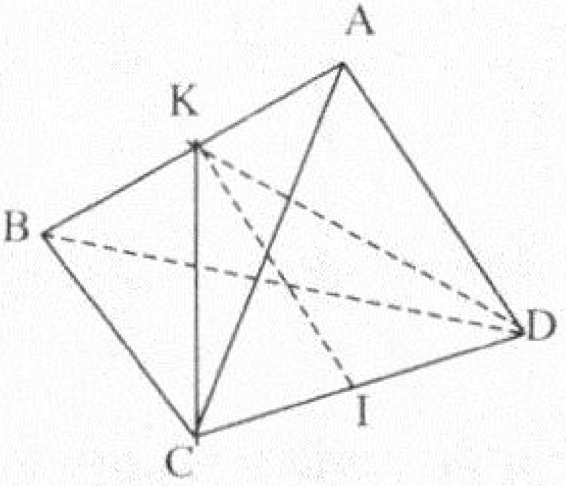
d) Gọi H là hình chiếu vuông góc với điểm I trên mặt phẳng (ABC). Chứng minh H là trực tâm ΔABC.

LỜI GIẢI

a. Gọi K và I lần lượt là trung điểm của AB, CD, ta có:

$$\left.\begin{matrix} DK \perp AB \\ CK \perp AB \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \perp (CDK)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AB \perp CD \\ AB \perp IK \end{cases}$$



Ta lại có: KC = KD vì chúng là đường cao của hai tam giác đều bằng nhau. Do đó:

$$KI \perp CD.$$

Vậy IK là đường vuông góc chung của AB và CD.

b. Tam giác ACD vuông tại A vì:

$$AC^2 + AD^2 = 2a^2 + 2a^2 = 4a^2 = CD^2.$$

Vậy IA = IC = ID = a.

Gọi V_{ABCD} là thể tích tứ diện ABCD, ta có:

$$V_{ABCD} = 2V_{DABI} = 2\frac{1}{3}ID.\ dt\ (\Delta ABI)$$

mà $dt(\Delta ABI) = \frac{1}{2}AB.IK = \frac{1}{2}AB\sqrt{IA^2 - AK^2}$,

do đó: $V_{ABCD} = \frac{2}{3}a.\frac{a^2}{2} = \frac{a^3}{3}$

c. Tam giác BCD vuông tại B vì có:

$$BC^2 + BD^2 = 2a^2 + 2a^2 = 4a^2 = CD^2$$

Do đó: $IB = IC = ID = IA$. Vậy trung điểm I của CD là tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

d. Ta có: $IA = IB = IC = a$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm I trên mp(ABC), ta có:

$$HA = HB = HC = \sqrt{a^2 - IH^2}$$

Vậy H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC, do đó H cũng là trực tâm của tam giác ABC.

VÍ DỤ 3.4

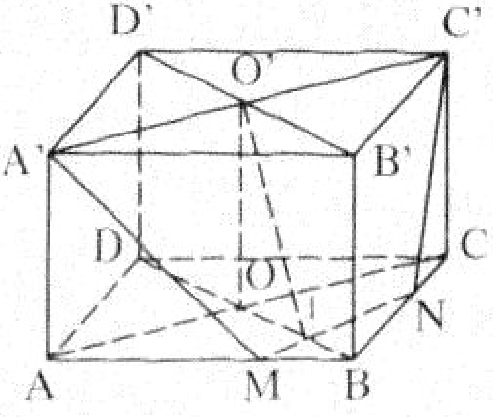
Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D', cạnh a và một điểm M trên cạnh AB, AM = x, 0 < x < a. Xét mặt phẳng (P) đi qua điểm M và chứa đường chéo A'C' của hình vuông A'B'C'D'

a) Tính diện tích thiết diện của hình lập phương cắt bởi mp(P)

b) mp(P) chia hình lập phương thành 2 khối đa diện , hãy tìm x để thể tích của một trong hai khối đa diện gấp đôi thể tích đa diện kia.

(Học viện Ngân hàng, 1999)

LỜI GIẢI



a. Mặt phẳng (P) cắt mặt (ABCD) theo giao tuyến MN//A'C', và $N \in BC$, thiết diện là hình thang A'C'MN có $A'M = C'N$

Gọi I là trung điểm của đoạn MN và O' là tam của hình vuông A'B'C'D'

Ta có: OI là đường cao của hình thang A'C'MN

Ta có: $MN = BM\sqrt{2} = (a - x)\sqrt{2}$

$$OI = x\sqrt{2}.$$

Do đó: $O'I = \sqrt{O'O^2 + OI^2} = \sqrt{a^2 + \frac{x^2}{2}}$.

Gọi S là diện tích của hình thiết diện, ta có:

$$S = \frac{1}{2}(A'C' + MN)O'I) = \frac{1}{2}\left[a\sqrt{2} + (a - x)\sqrt{2}\right]\sqrt{a^2 + \frac{x^2}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(2a - x)\sqrt{a^2 + \frac{x^2}{2}}$$

b. Mặt phẳng (P) chia hình lập phương thành 2 khối đa diện trong đó khối đa diện nhỏ là hình chóp cụt tam giác có đáy là tam giác BMN và đáy lớn ΔB'A'C'. Gọi Vectơ là thể tích khối chóp cụt có chiều cao h = a, S là diện tích tam giác B'A'C', S' là diện tích tam giác BMN, ta có:

$$S = \frac{a^2}{2};\quad S' = \frac{(a - x)^2}{2}$$

Từ đó: $V_1 = \frac{1}{3}h\left(S + S' + \sqrt{SS'}\right)$

$$= \frac{1}{3}a\left[\frac{a^2}{2} + \frac{(a - x)^2}{2} + \sqrt{\frac{a^2(a - x)^2}{4}}\right]$$

$$= \frac{1}{6}a\left(x^2 - 3ax + 3a^2\right) = \frac{a^3}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\left(3 - \sqrt{5}\right)a}{2}.$$

VÍ DỤ 3.5

Cho hai đường thẳng Δ, Δ' chéo nhau nhận AA' làm đường vuông góc chung. Gọi (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc với Δ', d là hình chiếu của Δ lên mp(P). Đặt AA' = a, góc nhọn giữa Δ và d là α. mp(Q) song song với mp(P) cắt Δ và Δ' lần lượt tại M và M'. Gọi M_1 là hình chiếu của M lên mp(P).

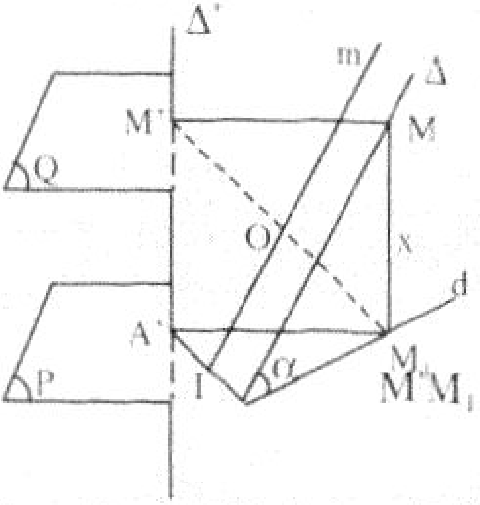
a) Chứng minh 5 điểm A, A', M, M', M_1, cùng nằm trên một mặt cầu (S). Xác định tâm O của S. Tính bán kính của S theo a, (α) và khoảng cách x giữa mp(P) và mp(Q).

b) Khi x thay đổi, hãy tìm quỹ tích của tâm O của mặt cầu (S). Chứng minh rằng khi (S) thay đổi, mặt cầu (S) luôn đi qua một đường tròn cố định.

(ĐH Kinh Tế Tp.HCM, 1994)

LỜI GIẢI

a. Ta có: AA' ⊂ (P) và (P) qua A và vuông góc với (Δ').



Vì MA ⊥ AA' nên M_1A ⊥ AA'

do đó: M_1A ⊥ mp(AA'M')

M_1A ⊥ M'A nên điểm A

thuộc mặt cầu đường kính $M'M_1$

M'A' ⊥ mp(P) ⇒ M'A' ⊥ $A'M_1$ nên

điểm A thuộc mặt cầu đường kính $M'M_1$

Vì M_1M ⊥ (Q) ⊃ MM' nên M_1M ⊥ MM'

Vậy 5 điểm A, A', M, M', M_1 cùng thuộc mặt cầu (S) đường kính $M'M_1$ Tâm O của (S) là trung điểm của $M'M_1$ bán kính R của (S) bằng: $\frac{M'M_1}{2}$, mà:

$$M'M_1^2 = M'A'^2 + A'A^2 + AM_1^2 = x^2 + a^2 + x^2 + \cot g^2\alpha$$

Vậy $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + x^2\left(1 + \cot g^2\alpha\right)}$.

b. Hình tứ giác $A'M'MM_1$ là hình chữ nhật nên O cũng là trung điểm của A'M. Do đó khi mp(Q) thay đổi, điểm O thuộc đường thẳng Im đi qua trung điểm I của đoạn OO' và song song với (Δ).

Vì mặt cầu (S) có tâm O thuộc đường thẳng Im và đi qua A, A' cố định nên mặt cầu (S) luôn luôn chứa đường tròn tâm I trung điểm AA', đường tròn này nhận IM làm trục và nằm trong mp(P) chứa AA' và vuông góc với trục Im tại I. Đường tròn này cố định vì có đường kính cố định và nằm trong mp(R) cố định.

BÀI TẬP

1. Cho tứ diện SABC có các cạnh bên SA = SB = SC = d. và $\widehat{ASB} = 120^0$, $\widehat{ASB} = 60^0$, $\widehat{ASB} = 90^0$.

a) Chứng minh tam giác ABC là tam giác vuông

b) Tính thể tích tứ diện SABC.

c) Tính bán kính của hình cầu nội tiếp tứ diện SABC.

(HVCTQG Hồ Chí Minh, 1999)

2. Cho tam giác ABC, AB = AC. Một điểm M thay đổi trên đường thẳng vuông góc với mp (ABC) tại A (M không trùng với điểm A).

a) Tìm quỹ tích trọng tâm G và trực tâm H của tam giác MBC

b) Gọi O là trực tâm của tam giác ABC, hãy xác định vị trí của M để thể tích tứ diện OHBC đạt giá trị lớn nhất.

3. Cho tam giác vuông cân ABC có cạnh huyền AB = 2a. Trên đường thẳng d đi qua A và vuông góc với mp(ABC) lấy một điểm S khác A.

a) Chứng minh tứ diện SABC chỉ có một cặp cạnh đối diện vuông góc với nhau.

b) Xác định tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SABC. Tính bán kính mặt cầu này trong trường hợp mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng (ABC) một góc bằng 30^0.

c) Tìm quỹ tích tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SABC khi S chạy trên d ($S \neq A$).

d) Lấy S' đối xứng với S qua A, gọi N là trung điểm của SC. Xác định thiết diện tạo bởi mặt phẳng đi qua S', N và song song với BC cắt tứ diện SABC. Tính diện tích của thiết diện đó khi $SA = a\sqrt{2}$.

4. Cho hình vuông ABCD cạnh a, tâm I (A đối diện với C), các nửa đường thẳng Ax, Cy vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và ở cùng một phía đối với mặt phẳng đó. Cho điểm M không trùng với A trên Ax, cho điểm N không trùng với C trên Cy. Đặt $AM = m$, $CN = n$.

a) Thể tích của hình chóp BAMNC.

b) Tính MN theo a, m, n và tìm điều kiện đối với a, m, n để góc MIN là góc vuông.

5. Trong mặt (P) cho tam giác vuông tại A, $AB = c$, $AC = b$ lấy điểm S sao cho $SA = h$ ($h > 0$). M là một điểm di động trên cạnh SB. Gọi I, J lần lượt là các trung điểm của BC và AB.

a) Tính độ dài đoạn vuông góc chung của 2 đường thẳng SI và AB.

b) Tính tỉ số giữa thể tích các hình chóp BMJ và BSCA khi độ dài đoạn vuông góc chung của 2 đường AC và MJ đạt giá trị lớn nhất.

6. Trên mặt phẳng (α) cho góc xOy. Đoạn $SO = a$, vuông góc với mặt phẳng (α). Các điểm M, N chuyển động trên Ox, Oy sao cho ta luôn có $OM + ON = a$.

a) Xác định giá trị lớn nhất của thể tích tứ diện SOMN.

b) Tìm quỹ tích tâm I của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SOMN. Chứng minh rằng khi đó tứ diện có thể tích lớn nhất thì nó lại có bán kính mặt cầu ngoại tiếp nhỏ nhất.

7. Trong mặt phẳng (P) cho một đường thẳng (d) và điểm A ngoài d. Một góc xAy di động quanh A, cắt d tại B và C. Trên đường thẳng qua A và vuông góc với (P) lấy một điểm S. Gọi H và K là các hình chiếu vuông góc của A lên SB và SC.

a) Chứng minh A, B, C, H, K thuộc mặt cầu.

b) Tính bán kính mặt cầu trên biết AB = 2, AC = 3, góc $\widehat{BAC} = 60^0$.

c) Giả sử tam giác ABC vuông tại A. Chứng minh rằng mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện ABCHK luôn luôn đi qua một đường tròn cố định khi S thay đổi.

8. Bên trong hình trục tròn xoay có hình vuông ABCD cạnh a nội tiếp mà hai đỉnh liên tiếp A, B nằm trên đường tròn đáy thứ nhất của hình trụ, hai đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy thứ 2 của hình trụ. Mặt phẳng hình vuông tạo với đáy của hình trụ một góc 45^0. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình trụ đó.

HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ

CHƯƠNG I

§1. Đường thẳng

1. a) $3x - 2y - 13 = 0$; b) $3x - 5y - 15 = 0$

c) $2x - 5y - 26 = 0$; d) $2x + y - 5 = 0$

e) $5x + 2y + 7 = 0$

2. Gọi E là điểm đối xứng với A qua trọng tâm G. Ta có: EB//CG, EC//BG. Từ đó tìm được tọa độ B, C.

(AB) : $x + 2y - 7 = 0$(AC): $x - y + 2 = 0$

(BC): $x - 4y - 1 = 0$

3. a) A(4; 0), B (0; 3)

b) $H\left(\frac{36}{25}; \frac{48}{25}\right)$

c) Các điểm đối xứng với A, B qua O là A'(-4; 0), B'(0; -3).

Đường thẳng cần tìm là (A'B'): $\frac{x}{-4} + \frac{y}{-3} = 1$

$\Leftrightarrow 3x + 4y + 12 = 0$

4. a) $dt(ABCD) = dt(ABC + dt(DBA)$

$= \frac{1}{2}AB.d(B, AB) + \frac{1}{2}AB.d(0, AB)$

$= 6$ (dvdt)

b) Giả sử hình vuông là MNPQ, trong đó MN qua A, QP qua C, NP qua B, MQ qua D. Bài toán có 2 đáp số:

(MN): $-7x - y + 15 = 0$ (MN): $\frac{1}{5}x - y + \frac{1}{3} = 0$

(PQ): $-7x - y + 26 = 0$ và (PQ): $\frac{1}{3}x - y + 4 = 0$

(NP): $x - 7y + 7 = 0$ (NP): $x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3} = 0$

$$(MQ): x + \frac{1}{3}y - \frac{10}{3} = 0$$

5. Cần tìm C trên đường thẳng $x - 2y + 1 = 0$ sao cho $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

ĐS: Có 2 điểm là (3; 2) và $\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$

6. a) Giả sử $M(x_0, y_0)$

$$d(M, (d)) = \frac{|x_0 \cos + y_0 \sin\alpha + 2\cos\alpha + 1|}{\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}}$$

$$= |(x_0 + 2)\cos\alpha + y_0 \sin\alpha + 1|$$

$d(\mu, (d))$ không phụ thuộc $(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -2 \\ y = 0 \end{cases}$

Khi đó: $d(\mu, (d)) = 1$

Vậy (d) luôn tiếp xúc với đường tròn $(x + 2)^2 + y^2 = 1$ $\forall\alpha$.

7.a) K(1; 2), P(-1; 1)

b) Ta có: AM + AN = PA + AN

Do đó AM + AN nhỏ nhất $\Leftrightarrow A = (D) \cap (NP)$

Từ đó tìm được A(-3; 10) và min (AM + AN) = PN = $2\sqrt{85}$.

8. Dùng chùm đường thẳng

ĐS: a) $x - 4y - 24 = 0$

b) $3x + 4y - 122 = 0$

9. a) Gọi $M(x_0, y_0)$ là giao điểm của (D_1) và (D_2)

Khi đó: $\begin{cases} -2t = 3t'+1 = x_0 \\ y_0 = -3t = 6t'+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2t - 3t' = 1 \\ -3 - 6t' = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t' = 1 \end{cases}$

Thay giá trị của t (hoặc của t') vào phương trình của (D_1) (hoặc của D_2) ta được $M_0(-2; -3)$.

b) Vectơ chỉ phương của (D_1) và $\vec{u}_1 = (2; 3)$, vectơ chỉ phương của (D_2) là $\vec{u}_2 = (1; 2)$. Gọi φ là góc nhọn tạo bởi (D_1) và (D_2), ta có:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u}_1 \vec{u}_2}{|\vec{u}_1| . |\vec{u}_2|} = \frac{8\sqrt{65}}{65}$$

10. Có hai đường thẳng $x = 2$ và $7x + 24y - 134 = 0$

11. Phân giác trong của góc B:

$(1 - \sqrt{2})x + (3 + 2\sqrt{2})y + 2\sqrt{2} - 7 = 0$

Phân giác của góc C: $(1 + 2\sqrt{2})x + (3 + \sqrt{2})y - 4\sqrt{2} - 7 = 0$

12. a) $M(x_0; y_0)$ là điểm mà họ đường thẳng không đi qua với mọi α.

$(x_0 - 1)\cos\alpha + (y_0 - 1)\sin\alpha = 1$ vô nghiệm α

$\Leftrightarrow (x_0 - 1)^2 + (y_0 - 1)^2 < 1$

Tập hợp những điểm mà đường thẳng không thể đi qua là miền trong của đường tròn $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$.

b) Mọi đường thẳng của họ luôn tiếp xúc với đường tròn:

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$$

§2. Đường tròn

1. Dùng phương trình tổng quát của đường tròn

ĐS: $\left(x+\frac{4}{3}\right)^2+\left(y+\frac{5}{3}\right)^2=0$

2. Xét đường tròn (C): $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$, tâm I(a; b), bán kính R.

(C) tiếp xúc Ox $\Leftrightarrow d(I, Ox) = R \Leftrightarrow b^2 = R^2$

(C) đi qua (0; 1) $\Leftrightarrow (0-a)^2+(1-b)^2=R^2$

$$\Leftrightarrow b=\frac{a^2+1}{2} \text{ (do } b^2=R^2\text{)}$$

Do đó phương trình (C): $(x-a)^2+\left(y-\frac{a^2+1}{2}\right)^2=R^2$

Tọa độ tâm I của (C):

$$\begin{cases} x_1 = a \\ y_1 = \frac{a^2+1}{2} \end{cases} \Rightarrow y_1 = \frac{x_1^2+1}{2}$$

Vậy quỹ tích tâm I của (C) là parabol $y=\frac{x^2+1}{2}$

3. Dùng phương trình tổng quát của đường tròn.

ĐS: $x^2+y^2+x-y-2=0$

4. Xem ví dụ 2: ĐS: $(x+1)^2+(y-2)^2=5$

5. a) Tọa độ giao điểm là nghiệm của hệ gồm phương trình hai đường tròn.

ĐS: (C_1); (C_2) cắt nhau tại hai điểm:

$B\left(\frac{7-18\sqrt{3}}{13}; \frac{-17-12\sqrt{3}}{13}\right)$, $C\left(\frac{7+18\sqrt{3}}{13}; \frac{-17+12\sqrt{3}}{13}\right)$

b. Dùng phương trình chùm đường tròn.

ĐS: $16x^2 + 16y^2 - 28x + 58y - 74 = 0$

6. (C) có tâm I(-1; 2), bán kính R = 5

$P_{A/(C)} = -5 < 0 \Rightarrow$ A nằm ở miền trong đường tròn (C)

a) Dây cung lớn nhất là đường kính. Phương trình đường kính AI là: $x + 2y - 3 = 0$.

b) Dây cung ngắn nhất qua A là dây cung vuông góc với AI tại A. Phương trình dây cung này là: $2x - y - 6 = 0$.

7.a) (C): $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$

b) Xem ví dụ 3: có hai tiếp tuyến: $y = 8$ và $4x - 3y + 4 = 0$

c) Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp ΔOAB thì I ở trên đường phân giác y = x. Do đó $x_I = y_I$. Diện tích ΔOAB là:

$$S = \frac{1}{2}OA\,.\,OB$$

Do đó: $$r = \frac{S}{P} = \frac{2S}{2P} = \frac{OA\,.\,OB}{OA + OB + OC} = \frac{48}{8 + 6 + 10} = 2$$

Suy ra: $x_I = y_I = 2$

Vậy phương trình đường tròn nội tiếp ΔOAB là:

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$$

8. a) Có hai tiếp tuyến là(T_1): $y = 2x - 3$ và (T_2): $y = -\frac{1}{2}(x + 1)$

b) $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 5$

9. Có hai tiếp tuyến là $2x + y = 0$ và $2x + y - 10 = 0$

10. a) (C) có tâm O $(0; 0)$, bán kính $r = 1$

(Cm) có tâm $I(m + 1; -2m)$, bán kính $R = \sqrt{(m+1)^2 + 4m^2 + 5}$

khoảng cách hai tâm là $OI = \sqrt{(m+1)^2 + 4m^2} < R$.

Do đó:

(Cm) tiếp xúc trong (C) $\Leftrightarrow R - r = OI \quad \Leftrightarrow R = r + OI$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(m+1)^2 + 4m^2 + 5} = 1 + \sqrt{(m+1)^2 + 4m^2}$$

$$\Leftrightarrow 2 = \sqrt{5m^2 + 2m + 1} \quad \Leftrightarrow 5m^2 + 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = \dfrac{3}{5} \end{array}\right.$$

Vậy có hai đường tròn của họ (Cm) tiếp xúc với (C) là:

(C_{-1}): có tâm $I_1(0; 2)$, bán kính $R_1 = 3$

$\left(C_{-\frac{3}{5}}\right)$: có tâm $I_2\left(\frac{8}{5}; -\frac{6}{5}\right)$, bán kính $R_2 = 3$

b) Vì $I_1I_2 = \frac{8}{\sqrt{5}} < 6 = R_1 + R_2$ nên (C_{-1}) và $\left(C_{-\frac{3}{5}}\right)$ cắt nhau, nhưng có cùng bán kính do đó chung có hai tiếp tuyến ngoài song song với nhau và song song với đường nối hai tâm I_1I_2. Từ đó tìm được hai tiếp tuyến chung là:

$2x + y - 2 - 3\sqrt{5} = 0$ và $2x + y - 2 + 3\sqrt{5} = 0$

11. a) (Cm) là đường tròn $\Leftrightarrow 1^2 + 1^2 - m > 0 \Leftrightarrow m < 2$

Khi đó (Cm) có tâm $I(1; 1)$, bán kính $R = \sqrt{2-m}$

b) (Cm) có bán kính $R_m = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2-m} = 1$

⇔ $m = 1$. Khi đó $(Cm) \equiv (C)$: $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1$

Tiếp tuyến tại A của (C): $y = x - \sqrt{2}$

c) Có hai tiếp tuyến là: $x + y - 2 + \sqrt{2} = 0$ và $x + y - 2 + \sqrt{2} = 0$

12. a) (C_1) có tâm $I(2; -1)$, bán kính $R_1 = 2$

(C_2) có tâm $J(5; 3)$, bán kính $R_2 = 2$

Dễ thấy $IJ = 5R_2 + R_2 \Rightarrow (C_1)$ tiếp xúc ngoài (C_2)

Tiếp điểm H của (C_1) và (C_2) thỏa mãn $\overrightarrow{HI} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{HJ}$

Từ đó $H\left(\frac{19}{5}; \frac{7}{5}\right)$.

b) Gọi $K = (D) \cap IJ \Rightarrow K$ là điểm chia đoạn IJ theo tỉ số $K = \frac{3}{2}$.

Từ đó tìm được $K(11; 11)$.

$$\begin{aligned} M(x; y) \in (C) \quad & \Leftrightarrow \overrightarrow{KM} \,.\, \overrightarrow{MH} = 0 \\ & \Leftrightarrow \left(x - \frac{19}{5}\right)(x - 11) + \left(y - \frac{7}{5}\right)(y - 11) = 0 \\ & \Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{74}{5}x - \frac{62}{5}y + \frac{286}{5} = 0 \end{aligned}$$

§3. Các đường conic

1. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

2. a) $F_1(-2\sqrt{3}; 0)$, $F_2(2\sqrt{3}; 0)$, $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) Tỉ số $= \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) (C) có tâm $I \equiv F_1(-2\sqrt{2}\ ;\ 0)$, bán kính $R = 4$.(C') đi qua F_2 và tiếp xúc với (C) nên bán kính của (C') là:

$$R' = NF_2 = \sqrt{\left(x_N - 2\sqrt{3}\right)^2 + y_N^2}$$

(C) tiếp xúc ngoài với (C') $\Leftrightarrow$ $F_1N = R + R'$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(x_N + 2\sqrt{3}\right)^2 + y_N^2} = 4 + \sqrt{\left(x_N - 2\sqrt{3}\right)^2 + y_N^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_N \geq \dfrac{2}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{x_N^2}{4} - \dfrac{y_N^2}{8} = 1 \end{cases}$$

Vậy tâm N của (C') luôn nằm trên hypebol có phương trình

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = 1.$$

3. Xem ví dụ 3.4

ĐS: Phương trình bốn cạnh của hình vuông là:

$x + y + 3 = 0$; $x - y + 3 = 0$; $x + y - 3 = 0$; $x - y - 3 = 0$

4. Viết phương trình (E) dưới dạng: $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{36} = 1$

a) Độ dài trục nhỏ $2a = 6$, trục lớn $2b = 12$,

tiêu cự $2c = \sqrt{a^2 - b^2} = 6\sqrt{3}$

b) Có hai tiếp tuyến $x + y \pm 3\sqrt{5} = 0$

c) Xét (P) có phương trình: $x^2 = 2py$. Ta có:

$$p = 2\,OF_1 = 6\sqrt{3}$$

Vậy (P): $x^2 = 12\sqrt{3}\,y \Leftrightarrow y = \frac{1}{12\sqrt{3}}x^2$

5. a) M(1; $\sqrt{3}$)

b) Gọi I = AM $\cap$ Oy thì BI là phân giác góc MBA.

Vì MA > MB nên $x \geq 0$. Do đó:

$MB^2 = (x - 2)^2 + y^2$, A = 4, AO = 2

Theo tính chất đường phân giác, ta có:

$$\frac{MB}{AB} = \frac{IM}{IA} = \frac{x}{OA} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 2x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 + 4x + \frac{4}{3} - y^2 = \frac{16}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{16}\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{3y^2}{16} = 1$$

Đặt $X = x + \frac{2}{3}$, $Y = y$, ta có:

$$(H)\ \frac{X^2}{\frac{16}{9}} - \frac{Y^2}{\frac{16}{3}} = 1$$

Vậy M thuộc nhánh phải của hypebol (H). Trong tọa độ mới tiêu điểm phải của (H) là $F\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}; 0\right)$

$\Rightarrow$ Tọa độ của tiêu điểm F trong hệ tọa độ Oxy là:

$$F\left(\frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3}; 0\right).$$

6. a) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (E):

$$\frac{x^2}{9} + (x^2 - 2x)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = 9x^4 - 36x^3 + 37x^2 - 9 = 0$$

Điều phải chứng minh suy ra từ f(x) là hàm liên tục và f(-1) . f(0) < 0, f(0). f(1) < 0, f(1) . f(2) < 0, f(2) . f(3) < 0.

Tọa độ giao điểm của (P) và (E) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{9} + y^2 = 1 \\ y = x^2 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{9} + y^2 = 1 \\ \dfrac{8}{9}x^2 - \dfrac{16}{9}x - \dfrac{8}{9}y = 0 \end{cases},$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{9} + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 - \dfrac{16}{9}x - \dfrac{8}{9}y - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{(Cộng hai phương trình trên)}$$

Vậy 4 điểm A, B, C, D nằm trên đường tròn.

$$x^2 + y^2 - \frac{16}{9}x - \frac{8}{9}y - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{8}{9}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{9}\right)^2 = \frac{19}{9}$$

Đường tròn này có tâm $I\left(\frac{8}{9}; \frac{4}{9}\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{19}}{3}$.

7. a) Chú ý $A(1; -4) \in$ parabol. ĐS: $2x + y + 2 = 0$

b) $2x - y + 2 = 0$

8. a) Đường kính của (E) cắt (E) tại hai điểm đối xứng qua tâm O là $M(x_0, y_0)$, $N(-x_0; y_0)$. Phương trình các tiếp tuyến của elip tại M và N lần lượt là:

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1 \quad \text{và} \quad \frac{-x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1$$

Rõ ràng hai tiếp tuyến này song song với nhau

b) $a^2K^2 + b^2 = m^2$

9. a) Phương trình đường thẳng (D) có dạng:

$$A(x - 2) + B(y + 1) = 0$$

(D) tiếp xúc (H) $\Leftrightarrow 16A^2 - 4B^2 = (2A + B)^2 \neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2A + B \neq 0 \\ 12A^2 = 4AB + 5B^2 \end{cases}$$

Chọn A = 1, ta được: $5B^2 + 4B^2 - 12 = 0$

Từ đó ta được :

$$\left[\begin{array}{ll} A = 1, \quad B = 2 & \text{(loại)} \\ A = 1, \quad B = -\dfrac{1}{5} & \text{(thích hợp)} \end{array}\right.$$

Vậy tiếp tuyến cần tìm là: $5x - 6y - 16 = 0$

b) Hãy chứng minh $\dfrac{M_1F_1}{M_1F_2} = \dfrac{BF_1}{BF_2}$, trong đó B là giao của (D) và Ox.

10. a) Giả sử hai đường thẳng vuông góc với nhau $Ax + By + C = 0$ và $-Bx + Ay + C' = 0$ đều là tiếp tuyến của elip $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Khi đó:

$$\begin{cases} a^2A^2 + b^2B^2 = c^2 \\ a^2B^2 + b^2B^2 + c'^2 \end{cases}$$

Cộng hai phương trình trên, ta được:

$$(a^2 + b^2)(A^2 + B^2) = c^2 + c'^2$$

Giao điểm M của hai tiếp tuyến có tọa độ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ -Bx + Ay + C' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{BC' - AC}{A^2 + B^2} \\ y = \dfrac{-CB - AC'}{A^2 + B^2} \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{BC'^2 + A^2C^2 + B^2C^2 + A^2C'^2}{\left(A^2 + B^2\right)^2} = \frac{\left(A^2 + B^2\right)\left(C^2 + C'^2\right)}{\left(A^2 + B^2\right)^2}$$

Chú ý tới đẳng thức (1) ta được: $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$

Tóm lại: quỹ tích cần tìm là đường tròn tâm O, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2}$ nếu $a > b$; là tập rỗng nếu $a \le b$.

b) Làm tương tự câu a, ta đi đến quỹ tích là đường tròn tâm O bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2}$ nếu $a > b$; là tập rỗng nếu $a \le b$.

c) Giả sử hai đường thẳng vuông góc với nhau $Ax + By + C = 0$ và $-Bx + Ay + C' = 0$ đều tiếp xúc với parabol $y^2 = 2px$. Khi đó ta có:

$$\begin{cases} B^2p^2 = 2AC \\ A^2p = -2BC' \end{cases} \Rightarrow \qquad A^2 + B^2 = \frac{2\left(AC - BC'\right)}{p}$$

Giao điểm của hai tiếp tuyến đó cọ tọa độ (x; y), với:

$$x = \frac{BC' - AC}{A^2 + B^2}, \quad y = \frac{-CB - AC'}{A^2 + B^2}$$

Từ đó suy ra:

$$x = \frac{\left(BC' - AC\right)p}{2\left(AC - BC'\right)} = -\frac{p}{2}$$

Vậy quỹ tích cần tìm là đường thẳng $x = -\dfrac{p}{2}$ (chính là đường chuẩn của parabol).

11. a) Phương trình tham số của đường thẳng đi qua M có dạng:

$$\begin{cases} x = 2 + at \\ y = 1 + bt \end{cases}$$

Để tìm tọa độ của giao điểm A và B, ta giải phương trình:

$$\frac{(2+at)^2}{25} + \frac{1+bt}{16}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a^2}{25} + \frac{b^2}{16}\right)t^2 + \left(\frac{4a}{25} + \frac{2b}{16}\right)t + \frac{4}{25} + \frac{1}{16} - 1 = 0$$

Phương trình trên phải có hai nghiệm t_1 và t_2 ứng với hai điểm A và B. Nhưng vì A và B đối xứng với nhau qua M nên $t_1 = -t_2$ hay $t_1 + t_2 = 0$. Theo định lí Viet, điều đó suy ra $\frac{4a}{25} + \frac{2b}{16} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 32a + 25b = 0$$

Chọn $a = 25$, $b = -32$, ta được phương trình đường thẳng cần tìm là:

$$\frac{x-2}{25} = \frac{y-1}{-32} \quad \Leftrightarrow \quad 32x + 25y - 89 = 0$$

b) Tương tự a, ĐS: $9x - 2y - 52 = 0$

12. $\lambda = 1$: (P_λ) là điểm $(0; 1)$

$\lambda > 1$: (P_λ) là elip

$\lambda < 0$: (P_λ) là hyperbol

$0 \leq \lambda \leq 1$: $(P_\lambda) = \phi$

13. Thiết lập hệ trục vuông góc Oxy với gốc O là trung điểm của AB, trục Ox trùng với AB. Trong hệ tọa độ này $A(-a; 0)$, $B(a; 0)$. Gọi

M(x; y) là điểm bất kỳ trong mặt phẳng và H là hình chiếu của M xuống Ox. Ta có:

$$\text{tg}B = -\frac{\overline{HM}}{\overline{BH}} = -\frac{y}{x-a}$$

Do đó:

$$\text{Tg}A\,.\,\text{tg}B = k$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{x+a}.\left(-\frac{y}{x-a}\right) = k$$

$$\Leftrightarrow -\frac{y^2}{x^2-a^2} = k \quad \Leftrightarrow \quad kx^2 + y^2 = ka^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{ka^2} = 1 \qquad (1)$$

- Nếu k = 1 thì (1) là phương trình đường tròn tâm O, bán kính a. Trong trường hợp này quỹ tích M là đường tròn đường kính AB.

- Nếu k = -1 thì (1) là phương trình hypebol vuông tâm O độ dài bán trục thực a.

- Nếu k > 1 thì (1) là phương trình của elip tâm O, trục lớn thẳng đứng, trục nhỏ nằm ngang.

- Nếu 0 < k < 1 thì (1) là phương trình elip tâm O, trục lớn nằm ngang, trục nhỏ thẳng đứng.

- Nếu k < 0 thì (1) là phương trình của hypebol tâm O, trục thực nằm ngang, nửa độ dài a, trục ảo thẳng đứng, nửa độ dài $\sqrt{|k|a^2}$.

CHƯƠNG II

§ 1. Vectơ. Toạ độ của vectơ và của điểm

1. d. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MI}$

Do đó $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$ nhỏ nhất ⇔ $\left|\overrightarrow{MI}\right|$ nhỏ nhất ⇔ M là hình chiếu vuông góc của I trên (P).

2. a) $\overrightarrow{PP'}+\overrightarrow{QQ'}+\overrightarrow{RR'}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{A'A}\right)=\vec{0}$

b) Gọi G, G' lần lượt là trung tâm của các ΔPQR và ΔP'Q'R'. Sử dụng a, hãy chứng minh $\overrightarrow{GG'}=\vec{0}$

3. a) $\overrightarrow{B'M}=\frac{1}{1-m}\left(\vec{a}+\vec{b}-m\vec{C}\right)$

$$\overrightarrow{B'N}=\frac{1}{1-n}\left(-n\vec{a}+\vec{b}+(1-n)\vec{C}\right)$$

b) $$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{B'N}-\overrightarrow{B'M}=\left(\frac{n}{1-n}+\frac{1}{1-m}\right)\vec{a}+$$

$$+\left(\frac{1}{1-n}-\frac{1}{1-m}\right)\vec{b}+\left(\frac{1}{1-m}\right)\vec{C} \qquad (1)$$

MN // B'D ⇔ $\overrightarrow{MN}=p.\overrightarrow{B'D}=p\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$ (2)

Vì $\vec{a};\vec{b};\vec{c}$ không đồng phẳng nên từ (1) và (2) suy ra:

$$p=-\left(\frac{n}{1-n}+\frac{1}{1-m}\right)=\frac{1}{1-n}-\frac{1}{1-m}=\frac{1}{1-m}$$

⇒ $m - 2n + 1 = 0$

Chọn $n = -1$ ⇒ $m = -3$.

Vậy $m = -3$, $n = -1$ thì MN // B'D.

c) Vì $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{c} = \vec{c}.\vec{a} = 0$ nên từ (1) suy ra

$$\overrightarrow{MN}^2 = \left(\frac{n}{1-n} + \frac{1}{1-m}\right)^2 \vec{a}^2 + \left(\frac{1}{1-n} - \frac{1}{1-m}\right)\vec{b}^2 + \frac{1}{1-m}\vec{C}^2$$

4. b) A' = (3; 5;-6), B' = (4; 6; -5), D' = (3; 4; -6).

5.a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = a^2 > 0 \Rightarrow \hat{A}$ nhọn

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = c^2 > 0 \Rightarrow \hat{C}$ nhọn

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = b^2 > 0$

b) $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$

$V_{0ABC} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{0A}, \overrightarrow{0B}\right]\overrightarrow{0C}\right| = \frac{1}{6}abc$

6. a) Gọi H là chân đường cao hạ từ D.

$V_{D.ABC} = \frac{1}{3}DH.S_{\Delta ABC}$

$$\Rightarrow DH = \frac{3V_{D.ABC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{3.\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\overrightarrow{AD}\right|}{\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right|} = \frac{27}{7}$$

b) Gọi G là trọng tâm tứ diện ABCD $\Rightarrow$ G (1; 2; 3)

Ta có: $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right| = 4 \Leftrightarrow \left|4\overrightarrow{MG}\right| = 4 \Leftrightarrow MG = 1$

Vậy tập hợp các điểm M là mặt cầu (S) tâm G, bán kính R =1.

7. a) Suy từ $AC^2 + BC^2 = AB^2 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông ở C

$$r = \frac{S}{P} = \frac{\frac{1}{2}AC.BC}{AB + BC + CA} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

b) $V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}\right]\overrightarrow{CD}\right| = 30$

8. a) Hãy kiểm tra

$$AB = BC = CA = 3\sqrt{2}$$

$$SA = SB = SC = 3$$

$$\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SA} = 0$$

b) Gọi H là trung điểm của AB $\Rightarrow H\left(\frac{7}{2};3;-\frac{5}{2}\right)$. Lúc đó H cũng là trung điểm của CD. Suy ra D (6; 4; -5).

Mặt cầu (S) tâm D, bán kính $R = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} = AB$

$$\Rightarrow \begin{cases} MD^2 = AB^2 = 18 \\ CD^2 = (2CH)^2 = 2\left(\dfrac{AB\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 54 \end{cases}$$

Đặt MA = a, MB = b, MC = c. Từ định lý đường trung tuyến suy ra:

$$a^2 + b^2 = 2MH^2 + \frac{18}{2}$$

Trong ΔMCD: $C^2 + D^2 = 2MH^2 + \frac{54}{2}$

Do đó: $C^2 = 2MH^2 + 9 = a^2 + b^2$

Từ đó suy ra: $MA^2 + MB^2 = MC^2$

Vậy tam có độ dài các cạnh là MA, MB, MC là tam giác vuông.

§2. Đường thẳng

1. a) $d(M,(\alpha)) = \dfrac{18}{\sqrt{14}}$

b. $x - 2y + 4z - 4 = 0$.

2. a) $a = 6$, $b = -8$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (α) và (β) là $d = \dfrac{2\sqrt{22}}{11}$

b) Hình chiếu H của A trên giao tuyến (d) chính là giao điểm của (d) và mặt phẳng qua A vuông góc với (d). Từ đó tìm được: $H\left(\dfrac{27}{17};-\dfrac{14}{51};\dfrac{31}{51}\right)$ khoảng cách từ A đến (d) là $AH = \dfrac{5\sqrt{221}}{51}$

3. a) Tọa độ hình chiếu H của A trên (P) là $H\left(\dfrac{24}{49};\dfrac{12}{49};\dfrac{57}{49}\right)$

b) Chú ý H là trung điểm của AA'.

Từ đó suy ra: $A'\left(\dfrac{48}{49};\dfrac{24}{49};\dfrac{65}{49}\right)$

4. M (x,y,z) ∈ mặt phẳng phân giác cần tìm.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M, M_0 \text{ nằm cùng phía} \\ M, \acute{M}_0 \text{ nằm cùng phía} \end{cases}$$

Khoảng cách d(M, (P)) = khoảng cách d (M,(Q)).

ĐS: $3x - y + 2z - 2 = 0$

5. $3x - y + 2z - 2 = 0$

6. Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A;B;C)$

a) M_1N_2 cắt $(\alpha) \Leftrightarrow \overline{M_1M_2}.n \neq 0$

$\Leftrightarrow Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D \neq Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D$

b) Đoạn thẳng M_1M_2 cắt $(\alpha) \Leftrightarrow$ có điểm I nằm trên (α) và chia đoạn M_1M_2 theo tỉ lệ số $k < 0$

c) $0 < \dfrac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D} < 1$

d) $0 < \dfrac{Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D}{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D} < 1$

7. a) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$

b) $H\left(\dfrac{b^2c^2a}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}; \dfrac{a^2c^2b}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}; \dfrac{a^2b^2c}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}\right)$

$$0H = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$$

e) $V_{0ABC} = \dfrac{1}{3} 0H.S_{\Delta ABC} \Rightarrow$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{3V_{0ABC}}{0H} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhia côpxki.

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \leq a^4 + b^4 + c^4$$

Mặt khác $k^4 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 = a^4 + b^4 + c^4 +$

$+ 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq 3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$. Do đó

$\max(S_{\Delta ABC}) = \dfrac{k^2}{2\sqrt{3}}$, đạt được khi $a = b = c$.

Mặt khác ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{a^2b^2c^2}} \Rightarrow OH^2 \leq \frac{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{3}$$

$$\leq a^2 + b^2 + c^2 = k^2$$

Do đó maxOH = k, đạt được khi a = b = c.

8. Chú ý rằng A và B ở cùng phía đối với mặt phẳng (P).

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua (P). Khi đó

$$AK + BK = A'K + BK.$$

Vậy muốn cho AK + BK nhỏ nhất thì k là giao điểm của đường thẳng A'A với (P).

Để tìm được A' (3; 1; 0), k = (AA') ∩ (P) = (-1; 2; 3).

§3. Mặt phẳng

1. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+2}{-3}$

2. a) (AB): $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-5}{-1}$

(BC): $\frac{x-7}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{0}$

(CA): $\frac{x-1}{0} = \frac{y-14}{2} = \frac{z+1}{1}$

b) (AD): $\frac{x-1}{\sqrt{5}} = \frac{y-2}{-2\sqrt{5}} = \frac{z-3}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$

3. a) (P): 5x - 4y + 3z - 3 = 0.

b) $x = \frac{1}{3} + 5t, \quad y = -\frac{1}{3} - 4t, \quad x = 3t$

c) Chân đường cao hạ từ A xuống BC là giao điểm H của

BC và mặt phẳng qua A vuông góc với BC. Từ đó tìm được $H\left(\frac{5}{19};-\frac{14}{19};-\frac{8}{19}\right)$

$$V_{0ABC}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{0A},\overrightarrow{0B}\right]\overrightarrow{0C}\right|=\frac{1}{2}$$

4. Xem ví dụ 3.3. ĐS: $\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ y-z-1=0 \end{cases}$

5. Gọi (α) là mặt phẳng chứa (d_1) và vuông góc với (P), (β) là mặt phẳng chứa (d_2) và vuông góc với (P). Khi đó $d = (\alpha)\cap(\beta)$

ĐS: (d) $\begin{cases} 2x+y-3z-1=0 \\ x-2y+z-4=0 \end{cases}$

6. Phương trình tham số của (d_1) và (d_2) lần lượt là

(d_1): $x = 2 + 3t$, $y = -2 + 4t$, $z = 1 + t$.

(d_2): $x = 7 + t'$, $y = 3 + 2t'$, $z = 9 - t'$.

Vectơ chỉ phương của (d_3) là: $\vec{u}=(3;-2;-1)$

Giả sử $M(2 + 3t, -2 + 4t, 1 + t) \in d_1$,

$N(7 + t', 3 + 2t', 9 - t') \in d_2$.

$MN // d_3 \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} // \vec{u}$

Từ đó tìm được $\overrightarrow{MN}=3\left(-\frac{3}{14};\frac{2}{14};\frac{1}{14}\right)$

và $N\left(\frac{80}{7};\frac{83}{7};\frac{32}{7}\right)$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là:

$$\frac{x-\frac{80}{7}}{3}=\frac{y-\frac{83}{7}}{-2}=\frac{z-\frac{32}{7}}{-1}$$

7. a) (d_1) có véc tơ chỉ phương $\vec{a}=(3;1;-2)$

(d_2) có véc tơ chỉ phương $\vec{b}=(2;-1;1)$

$\vec{a}\neq\vec{b}\Longrightarrow d_1\neq d_2$. Mặt khác, hệ $\begin{cases}x=-2+2t\\ y=-t\\ x+y+2z=0\\ x-y+z+1=0\end{cases}$

vô nghiệm $\rightarrow$ (d_1) và (d_2) chéo nhau.

b) Đường thẳng (d_1) đi qua A (1; -2; 4) và có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1=(-2;1;3)$, (d_2) đi qua B (-1; 0; -2) và có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2=(1;-1;3)$; Vì $[\vec{a},\vec{b}]\overrightarrow{AB}=0$ nên (d_1), (d_2) đồng phẳng

Mặt phẳng (α) chứa (d_1), (d_2) là mặt phẳng đi qua A và có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}=[\vec{a},\vec{b}]$. Từ đó tìm được:

$$(\alpha): 6x+9y+z+8=0.$$

c. (d_1) đi qua A (5; 1; 5) và có véc tơ chỉ phương $\vec{a}=(2;-1;-1)$, (d_2) đi qua B (3; -3; 1) và có vectơ chỉ phương $\vec{b}=(2;-1;-1)$

Vì $\vec{a}\,//\,\vec{b}\,//\,\overrightarrow{AB}$ nên $d_1\,//\,d_2$. Phương trình mặt phẳng chứa (d_1) và (d_2) là: y - z + 4 = 0.

8. a) Với mọi m, (P_m) luôn đi qua đường thẳng cố định

$$(d):\begin{cases}2x+y+z-1=0\\ x+y+z+1=0\end{cases}$$

b. $m = -\frac{3}{2}$

Khoảng cách từ 0 đến (P_0): $2x + y + z - 1 = 0$ là $0H = \frac{1}{\sqrt{6}}$

khoảng cách từ 0 đến $\left(P_{-\frac{3}{2}}\right)$: $x - y - z - 5 = 0$ là $0K = \frac{5}{\sqrt{3}}$

Gọi I là hình chiếu vuông góc của 0 trên (d).

Vì $(P_0) \perp \left(P_{-\frac{3}{2}}\right)$ nên OHIK là hình chữ nhật .

Do đó $OI = \sqrt{0H^2 + 0K^2} = \frac{\sqrt{34}}{2}$

9. a) (d) đi qua A(2; 1; 2) và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (1;-1;2)$

(d') đi qua B (2; 3; 0) và có vectơ chỉ phương $\vec{b} = (-2;0;1)$

Vì $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\overrightarrow{AB} = -16 \neq 0 \Rightarrow$ (d) và (d') chéo nhau.

Phương trình tham số của (d') là:

$x = 2-2t', \ y = 3, \ z = t'.$

Lấy tuỳ ý $M \in$ (d) và $N \in$ (d')

$\overrightarrow{MN} = (-2t'-t; 2+t; t'-2t)$

MN là đường vuông góc chung của (d) và (d').

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN} \perp \vec{a} \\ \overrightarrow{MN} \perp \vec{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN}.\vec{a} = 0 \\ \overrightarrow{MN}.\vec{b} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{3} \\ t' = 0 \end{cases}$$

Từ đó tìm được: N (2;3;0) và $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{1}{5};\frac{5}{3};\frac{2}{3}\right)$

Vậy phương trình đường vuông góc chung là:

(MN): $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-0}{2}$

b) Mặt phẳng (α) cách đều (d) và (d') chính là mặt phẳng trung trực của đoạn MN.

ĐS: (α): $x + 5y + 2z - 12 = 0$.

10. a) $I\left(4;-\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)$ Vì $x_A < x_I < x_B$ nên $I \in$ đoạn AB.

b) Gọi A' là điểm đối xứng với A qua (P) $\Rightarrow$A' (3;-12)

Ta có:

$|MA - MB| = |MA' - MB|$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ M là giao điểm của đường thẳng A'B với mặt phẳng (P).

Từ đo tìm được M (6; -1; -4).

§ 4. Mặt cầu

1. a) (S): $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

b) Tiếp điểm H là giao điểm của đường thẳng (d) qua 0 vuông góc với (P) và từ đó tìm được $H\left(-\frac{48}{25};\frac{9}{4};\frac{36}{25}\right)$.

c) Gọi k là điểm đối xứng của 0 qua (P), ta có H là trung điểm của OK. Từ đó $K\left(-\frac{96}{25};\frac{18}{5};\frac{72}{25}\right)$

2. a) Phương trình tham số của (d) là:

$x = 2t,\ y = 1 + t,\ z = -1 + 2t$.

Từ đó tìm được A(16; 9; 15), B(0; 1; - 1). Do đó AB = 4.

b) Gọi I $(2t_0 ; 1 + t_0; -1 + 2t_0) \in (d)$ là tâm mặt cầu.

Vì mặt cầu tiếp xúc (P) và (Q) nên:

$d(I;(P)) = d(I;(Q)) = R$

$$\frac{|-t_0+8|}{\sqrt{6}} = \frac{|5t_0|}{\sqrt{6}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{4}{3} \\ t = -2 \end{array}\right.$$

$$t = \frac{4}{3} \Rightarrow I_1\left(\frac{8}{3};\frac{7}{3};\frac{5}{3}\right),\ R_1 = \frac{20}{3\sqrt{6}}$$

$$t = -2 \Rightarrow I_2(-4;-1;-5),\quad R_2 = \frac{10}{\sqrt{6}}$$

Vậy có hai mặt thoả mãn là:

$$(S_1): \left(x-\frac{8}{3}\right)^2 + \left(y-\frac{7}{3}\right)^2 + \left(z-\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{400}{54}$$

$$(S_2): (x+4)^2 + (y+1)^2 + (z+5)^2 = \frac{100}{6}$$

3. a) Suy ra từ $\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC} = a^2 > 0$, $\overrightarrow{BA}\overrightarrow{BC} = b^2 > 0$, $\overrightarrow{CA}\overrightarrow{CB} = c^2 > 0$

b) (S): $x^2 + y^2 + z^2 - ax - by - cz = 0$.

$$O'\left(\frac{2ab^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2};\frac{2a^2bc^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2};\frac{2a^2b^2c}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\right)$$

4. Có hai mặt phẳng: $4x + 3y - 12z + 78 = 0$ và $4x + 3y + 2z - 26 = 0$

5. a) Có hai mặt cầu:

$$(S_1): \left(x-\frac{8}{5}\right)^2 + \left(y+\frac{9}{5}\right)^2 + \left(z-\frac{1}{5}\right)^2 = 1$$

(S_2): $(x+2)^2+(y+3)^2+(z+1)^2=1$

b. Dễ tìm được $M\left(-\frac{1}{5};-\frac{12}{5};-\frac{2}{5}\right)$.

Xét hai trường hợp:

*Trường hợp 1: Xét mặt cầu (S_2).

Tìm được $T=\left(-\frac{4}{3};-\frac{8}{3};-\frac{5}{3}\right)$. Do đó $MT=\frac{\sqrt{666}}{15}$

*Trường hợp 2: Với mặt cầu (S_1).

Tìm được $T\left(\frac{14}{15};-\frac{32}{15};\frac{13}{15}\right)$. Do đó $MT=\frac{\sqrt{666}}{5}$

6. a) Gọi H là trung điểm của AB $\Rightarrow$ H (-3;-7;-11)

Bán kính mặt cầu $R=\sqrt{IH^2+AH^2}=17$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) là

$(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=289$

b) $A\left(\frac{7}{3};-\frac{13}{3};-\frac{49}{3}\right)$, $B\left(-\frac{25}{3};-\frac{29}{3};-\frac{17}{3}\right)$

Phương trình tiếp diện tại A: $x - 22y - 46z - 849 = 0$.

Phương trình tiếp diện tại B: $31x + 38y + 14z + 705 = 0$.

7. Mặt cầu $x^2+y^2+z^2-2(x+y+z)-22=0$ có tâm I (1; 1; 1), bán kính R = 5.

Tâm H của đường tròn (C) là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng $3x - 2y + 6z + 14 = 0$

$\Rightarrow H\left(-\frac{2}{7};\frac{13}{7};-\frac{11}{7}\right)$. Bán kính của (C) là

$r = \sqrt{R^2 - IH^2} = 4$

8. a) (S) có tâm 0 (0;0;0), bán kính R = 2. Khoảng cách từ 0 đến (P) là: $d = \dfrac{|0+0-2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} < 2 = R$ nên (P) cắt (S) theo một đường tròn (C). Từ đó tìm được (C) có tấm I(1;0;1), bán kính $r = \sqrt{2}$.

b) Phương trình (C): $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x + z = 2 \end{cases}$

Khử z ta được: $x^2 + y^2 + (2 - x)^2 = 4$.

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$

Vậy phương trình hình chiếu (C1) của (C) trên mặt phẳng 0xy là:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

(C_1) là elip có tâm I (1; 0), bán trục nhỏ a = 1, bán trục lớn b = 2.

CHƯƠNG III

§1. Phương pháp vectơ

1. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}, \overrightarrow{AD} = \vec{d}$ Chú ý rằng

$$\left|\vec{b}\right| = \left|\vec{d}\right| = \left|\vec{d}\right| = a \text{ và } \vec{b}.\vec{c} = \vec{c}.\vec{d} = \vec{d}.\vec{b} = \frac{a^2}{2}$$

a) Hãy chứng minh $\overrightarrow{0B}.\overrightarrow{0C} = \overrightarrow{0C}.\overrightarrow{0D} = \overrightarrow{0D}.\overrightarrow{0B} = 0$

b) Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng MG và PN.

$$\text{Ta có } \cos\varphi = \left|\cos\left(\overrightarrow{MG}, \overrightarrow{PN}\right)\right| = \frac{\left|\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{PN}\right|}{\left|\overrightarrow{MG}\right|.\left|\overrightarrow{PN}\right|}.$$

$$\text{Đáp số . } \cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

c) Hãy chứng minh $\overrightarrow{MG}, \overrightarrow{PN}, \overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng.

2. Gọi G là trọng tâm ΔABC, G là trọng tâm ΔMNP. Hãy chứng minh $3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AA}$ cố định.

Từ đó suy ra G' cố định.

3. Đặt $\frac{SK}{SA} = k, \frac{SL}{SB} = l, \frac{SM}{SC} = m, \frac{SN}{SD} = n$

Hãy chứng minh $\frac{1}{k} + \frac{1}{m} = \frac{1}{l} + \frac{1}{n}$ (xem ví dụ 1.5).

4. Hãy chứng minh $\overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{GG_2} + \overrightarrow{GG_3} = \vec{0}$

5. a) Chú ý $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SA'} = \overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SB'} =$ phương tích của S đối với đường tròn (ABA'B').

b) $SG = \frac{1}{3}\sqrt{SA^2 + SB^2 + SC^2}$

6. Đặt $\overrightarrow{C'D'} = \vec{a}, \overrightarrow{C'B'} = \vec{b}, \overrightarrow{C'C} = \vec{c}$ Ta có:

$$\overrightarrow{C'B}^2 + \overrightarrow{C'D}^2 = 4a^2 + 2\vec{c}.\overrightarrow{C'A'}$$

$$\overrightarrow{C'A}^2 = 4a^2 + 2\vec{c}.\overrightarrow{C'A'}$$

Từ đó suy ra đpcm.

7. Chú ý từ

$$\overrightarrow{AB}^2 = \left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}\right)^2 \Rightarrow 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 - \overrightarrow{AB}^2$$

Bình phương vô hướng đẳng thức:

$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right)$ và sử dụng chú ý trên ta được đpcm.

8. Chú ý $\overrightarrow{GG'} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DD'}\right)$

§2. Phương pháp toạ độ

1. Chọn hệ tọa độ 0xyz sao cho A = (0; 0; 0), B = (a; 0; 0), C = (a; a; 0), D = (0; a; 0), A' = (0; 0; a), B' = (a; 0; a), C' = (a; a; a), D' = (o; a; a). ĐS: c, $\frac{a\sqrt{3}}{3}$; d, $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

2. Chọn hệ toạ độ 0xyz sao cho A = (a; 0; 0), B = (0; b; 0), C = (0; 0; 0). Tìm điều kiện để các vectơ pháp tuyến của (0MN) và (0MP) là vuông góc với nhau.

3. $SD = \frac{abc\sqrt{3}}{ab + bc + ca}$; $SH = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

4. Chọn hệ toạ độ Oxyz sao cho O = (0; 0 ; 0), B = (2a; 0; 0), D = (0; 2a; 0), A' = (0; 0; a).

ĐS: $P = \left(0;0;-\frac{9}{8}a\right)$

5. Chọn hệ trục Oxyz sao cho D = (0; 0; 0), A = (2a; 0; 0), B = (2a; a; 0), C = (0; a; 0), A' = (2a; 0 ; $a\sqrt{2}$), B' = $\left(2a;a;a\sqrt{2}\right)$, C' = $(0;a;a\sqrt{2})$, D' = (0; 2a; $a\sqrt{2}$).

a. $V_{A'KID} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{A'K}, \overrightarrow{AI}\right]\overrightarrow{A'D}\right| = \frac{\sqrt{2}a^2}{24}(2a-m)$

Do đó $\max V_{A'KID} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ khi m = 0, tức là M ≡ A.

b. Gọi N là giao điểm của AA' và (B'CK). Vì (AA'D'D) // (BB'C'C) nếu CB' // MN ⇒ thiết diện là hình thang B'NMC;

$$S_{B'NMC} = S_{\Delta MNB'} + S_{\Delta MCB'} = \frac{3a^2\sqrt{2}}{2}$$

Gọi H là chân đường cao hạ từ N, ta có:

$$NH = \frac{2S_{\Delta MNB'}}{MB'} = \frac{a^2\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+a^2+2a^2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{AA'}{2}$$

Vậy B'M tiếp xúc với mặt cầu N đường kính AA'.

6. a) a ; b) $\frac{a}{2}$ c) $\frac{2}{3}a^3$

7. Chọn hệ toạ độ Oxyz sao cho O = (0;0;0), A= (a; 0; 0), B = (0; b; 0), C = (0; 0; c).

a) Hãy chứng minh $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} > 0, \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} > 0, \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} > 0$

b) OH chính là khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC)

ĐS: $OH = \dfrac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$

c) Chú ý $S_{\Delta ABC} = \dfrac{3V_{OABC}}{OH}$

8. Chọn hệ toạ độ Oxyz sao cho D = (0; 0; 0), A = (a; 0; 0), C = (0; a ; 0), D_1 (0; 0; a), trong đó sẽ tính a theo r từ điều kiện d $(I,(ACD_1)) = r$.

ĐS: $S_{tp\,ACB_1D_1} = 24\sqrt{3}r^2$, $V = 48\sqrt{6}r^3$

9. Chọn hệ toạ độ 0xyz sao cho A = (0; 0; 0), $C = \left(a\sqrt{2};\ 0;\ 0\right)$, $B = (0;\ a\sqrt{2};\ 0)$, $S = \left(a\sqrt{2};\ 0;\ a\sqrt{2}\right)$.

a) $MN = \sqrt{3t^2 - 4at + 2a^2}$

b) NM nhỏ nhất $\Leftrightarrow MN^2$ đạt GTNN $\Leftrightarrow t = \dfrac{2a}{3}$

c) Hãy chứng minh $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{CN} = 0$

10. b) $S_{0MIN} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}$

11. Chọn hệ toạ đọ Oxyz sao cho A = (0; 0; 0), D = (a; 0; 0), B = (o; a; 0), A_1 = (0; 0; -a).

Tâm I của mặt cầu (K) là giao điểm của 3 mặt phẳng trung trực của MN, AB_1, AM $\Rightarrow I\left(\dfrac{7a}{18};\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2}\right)$

a) Hãy chứng minh $IA_1 = IA$, $IB = IA$.

b) $IA = \dfrac{a\sqrt{211}}{18}$

12. a) Gọi O là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABCD). Vì $SA = SB = SC = SD = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow AO = BO = CO = DO$

$\Rightarrow$ O là tâm của đáy $\Rightarrow$ SABCD là hình chóp tứ giác đều.

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = a$$

b) Chọn hệ toạ độ Oxyz, O là tâm hình vuông, OA là trục hoành, 0B là trung tung (như đề bài). Khi đó $S = (0;\ 0;\ a)$, $A = (o;\ a;\ 0)$, $C = (-a;\ 0;\ 0)$, $D = (0;\ -a;\ 0)$. Phương trình mặt phẳng (SAB):

$$x + y + z - a = 0.$$

c) Có hai điểm $I_1\left(0;\ 0;\ \frac{a}{1-\sqrt{3}}\right)$ Và $I_2\left(0;\ 0;\ \frac{a}{1+\sqrt{3}}\right)$

§3. Phương pháp tổng hợp

1. a) Hãy chứng minh $BC^2 + AC^2 = 3d^2 = AB^2$.

b) Chú ý rằng hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mp(ABC) trùng với trung điểm H của AB. ĐS: $V_{SABC} = \frac{d^3\sqrt{2}}{12}$

c) Sử dụng công thức $V_{SABC} = \frac{1}{3}S_{tp}.r$, trong đó S_{tp} là diện tích toàn phần của tứ diện SABC. ĐS: $r = \frac{d\sqrt{2}}{2\left(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1\right)}$

2. a) Gọi d là đường thẳng $\perp$ (ABC) tại, A. D là trung điểm của BC. Chú ý $\overrightarrow{DG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DM} \Rightarrow$ quỹ tích G là đường thẳng (d') $\perp$ (ABC) tại trọng tâm G' của ΔABC, (d') là ảnh của (d) qua phép vị tự tâm D tỉ số $\frac{1}{3}$. Vì M ≠ A ⇒ G ≠ G'.

Hãy chứng minh $MB \perp 0H$, $MC \perp OH \Rightarrow OH \perp (MBC)$ và $DHO = 90^0 \Rightarrow$ quỹ tích H là đường tròn đường kính DO nằm trong mp(D,d), từ điểm O.

b) $V_{0HBC} = \frac{1}{3}HH'$ dt (ΔOBC) lớn nhất ⇔ HH' lớn nhất

⇔ ΔDHH' vuông cân tại H' ⇒ DMA vuông cân tại A ⇒ AM = AD.

3. a) Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$

Nếu $AC \perp SB \Rightarrow AC \perp mp(SAC) \Rightarrow AC \perp AB$: vô lý. Tương tự, AB không vuông góc với SC.

b) Tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SABC là trung điểm O của AB; $R = \frac{a\sqrt{24}}{6}$

c) Khi S chạy trên d thì O chạy trên đường thẳng d' vuông góc với (ABC) tại trung điểm I của AB.

d) $S_{\text{thiết diện}} = \frac{5a^2\sqrt{10}}{36}$

4. a) $V_{BAMNC} = \frac{1}{6}(m+n)a^2$

b) $MN = \sqrt{2a^2 + (m-n)^2}$

Δ MNI vuông tại I ⇔ $MI^2 + NI^2 = MN^2$

⇔ $a^2 - 2mn = 0$.

5. a) Ta có $AB \perp (SAC)$, SI có hình chiếu vuông góc trên mp(SAC) là SK, K là trung điểm của AC. Vẽ $AH \perp SK$ tại H.

Dựng HN // AB cắt SI tại N và dựng NQ // cắt AB tại Q, ta được QN là đoạn vuông góc chung của AB và SI. Chú ý rằng QN = AH, ta tính được $QN = \frac{bh}{\sqrt{b^2 + 4h^2}}$

b) Ta có:

$$\frac{V_{BMIJ}}{V_{BSCA}} = \frac{BM}{BS}.\frac{BI}{BC}.\frac{BJ}{BA} = \frac{BM}{BS}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}\frac{BM}{BS}$$

Gọi P là hình chiếu vuông góc của A trên MJ ⇒ AP là đoạn vuông góc chung của AC và MJ.

$$AP \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow P \equiv J. \text{ Khi đó } \frac{BM}{BS} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } \frac{V_{BMIJ}}{V_{BSCA}} = \frac{1}{8}.$$

6.a) $\max V_{SOMN} = \frac{a^3}{24}$, khi $OM = ON = \frac{a}{2}$

b) Tâm I của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SOMN là giao điểm của trục đường tròn ngoại tiếp ΔOMN và mặt phẳng trung trực của OS. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của miền núi và OS. Qua H vẽ đường thẳng cắt Ox, Oy tại M_0, N_0 sao cho ΔOM_0N_0 vuông cân đỉnh O. Hãy chứng minh M_0N_0 cố định và chú ý $\overrightarrow{HI} = \overrightarrow{OK}$. Từ đó suy ra quỹ tích I là đoạn M_1N_1, ảnh của M_0N_0 qua phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{OK}$.

$$\text{Ta có } R = IM \Rightarrow R^2 = \frac{MN^2}{4} + \frac{a^2}{4}$$

$$\text{mà } MN^2 = OM^2 + ON^2 = (OM + ON)^2 - 2OM.ON$$
$$= a^2 - 2OMON.$$

Do đó:

V_{SOMN} lớn nhất $\Leftrightarrow$ OM.ON lớn nhất $\Leftrightarrow$ MN^2 nhỏ nhất $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ R^2 nhỏ nhất.

7. a) A, B, C, H, K cùng thuộc mặt cầu đường kính AA'.

b) $R = \dfrac{\sqrt{21}}{3}$

c) Gọi A_1 là điểm đối xứng của A qua d, M là một điểm chung của mặt cầu qua A, B, C, H, K và (SAA_1) I là trung điểm của AA_1. Hãy chứng minh $IM^2 = IA^2$. Từ đó suy ra mặt cầu đã cho luôn đi qua đường tròn tâm I, bán kính SA, nằm trong $mp(SAA_1)$.

8. $S_{xq} = \dfrac{\pi^2 a^2 \sqrt{3}}{3}$, $\quad V = \pi R^2 h$

PHỤ LỤC

GIỚI THIỆU CÁC ĐỀ THI ĐẠI HỌC NĂM 2002

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG NĂM 2002
Môn thi: TOÁN, Khối A.
(Thời gian làm bài: 180phút)

Câu I (ĐH: 2,5 điểm: CĐ: 3,0 điểm).

Cho hàm số: $y = - x^3 + 3mx^2 + 3(1-m^2)x + m^3 - m^2$ (1) (m là tham số).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi $m = 1$.

2. Tìm k để phương trình: $- x^3 + 3x^2 + k^3 - 3k^2 = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

3. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (1).

Câu II: (ĐH: 1,5 điểm; CĐ: 2, 0 điểm).

Cho phương trình: $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 1 = 0$ (2) (m là tham số)

1. Giải phương trình (2) khi $m = 2$.

2. Tìm m để phương trình (2) có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $[1;\ 3\sqrt{3}\ ]$.

Câu III: (ĐH: 2, 0điểm; CĐ: 2,0 điểm).

1. Tìm nghiệm thuộc khoảng $(0;2\pi)$ của phương trình:

$$5\left(\sin x + \frac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2\sin 2x}\right) = \cos 2x + 3$$

2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường

$$y = |x^2 - 4x + 3|,\ y = x + 3.$$

Câu IV: (ĐH: 2,0 điểm; CĐ: 3,0 điểm).

1. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC đỉnh S, có độ dài cạnh đáy bằng a. Gọi M và N lần lượt là các trung điểm của các cạnh SB và SC. Tính theo a diện tích tam giác AMN, biết rằng mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC).

2. Trong không gian với hệ toạ độ Đêcacvuông góc Oxyz cho hai đường thẳng:

$$\Delta_1 : \begin{cases} x - 2y + z - 4 = 0 \\ x + 2y - 2z + 4 = 0 \end{cases} \quad \text{và} \quad \Delta_2 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}.$$

a. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng Δ_1 và song song với đường Δ_2.

b. Cho điểm M(2;1;4). Tìm toạ độ điểm H thuộc đường thẳng Δ_2 sao cho đoạn thẳng MH có độ dài nhỏ nhất.

Câu V. (ĐH: 2,0 điểm).

1. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ đêcac vuông góc Oxy, xét tam giác ABC vuông tại A, phương trình đường thẳng BC là $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$, các đỉnh A và B thuộc trục hoành và bán kính đường tròn nội tiếp bằng 2. Tìm toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC.

2. Cho khai triển nhị thức:

$$\left(2^{\frac{x-1}{2}} + 2^{\frac{-x}{3}}\right)^n = C_n^0\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^n + C_n^1\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^{n-1}\left(2^{\frac{-x}{3}}\right) + \ldots$$

$$\ldots + C_n^{n-1}\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)\left(2^{\frac{-x}{3}}\right)^{n-1} + C_n^n\left(2^{\frac{-x}{3}}\right)^n$$

(n là số nguyên dương). Biết rằng trong khai triển đó $C_n^3 = C_n^1$ và số hạng thứ tư bằng 20n, tìm n và x.

HƯỚNG DẪN CHẤM THI MÔN TOÁN KHỐI A

Câu I.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số:

+ Có thể thí sinh lập 2 bảng biến thiên để xét sự biến thiên và xét khoảng lồi lõm riêng. Trong trường hợp đó vẫn cho điểm tối đa.

2. Tìm k để phương trình có 3 nghiệm phân biệt:

+ Thí sinh có thể dùng đồ thị hoặc tam thức bậc 2. Khi đặt $a = k^3 + 3k^2$ ta có $0 < a < 4$. Sau đó thí sinh lại sử dụng đồ thị của hàm số đã vẽ để biện luận số nghiệm của phương trình $-k^3 + 3k^2 = a$. Phương trình sẽ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < k < 3 \\ k \neq 0, k \neq 2 \end{cases}$. Nếu thiếu điều kiện $k \neq 0$ và $k \neq 2$ thì trừ 0,25đ.

3. Việc chứng minh hàm số có 2 cực trị với mọi giá trị của m là bắt buộc. Nếu không chứng minh thì trừ 0,25điểm. Nếu thí sinh dùng cách 2 (trong đáp án) mà không chứng minh đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị thì trừ 0,25 điểm.

Câu II.

Đối với phần tìm m để phương trình đã cho có nghiệm thuộc đoạn $\left[1;3^{\sqrt{3}}\right]$ thì thí sinh có thể dùng nhiều phương pháp và có thể sử dụng nhiều cách đặt ẩn phụ khác nhau. Cho điểm tối đa nếu thí sinh lý luận chặt chẽ và kết quả đúng.

Câu III.

1. Có thể thí sinh không đặt điều kiện $\sin 2x \neq -\frac{1}{2}$ mà sau khi giải song có 2 nghiệm $x_1 = \frac{\pi}{3}$ và $x_2 = \frac{5\pi}{3}$ rồi thử lại thì vẫn

cho điểm tối đa. Trường hợp thí sinh không đặt điều kiện mà cũng không thử lại nghiệm thì trừ 0,25 điểm.

2. Không bắt buộc thí sinh phải vẽ hình. Thí sinh có thể sử tụng công thức tính diện tích như đã được học: $S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$ nhưng phải lý luận khi mở dấu giá trị tuyệt đối. (đường thẳng nằm phía trên đường cong: $|x^2 - 4x + 3| \le x + 3\ \forall x \ni [0;5]$).

Câu IV.

1. Điều quan trọng ở đây là phải chứng minh $AI \perp MN$.

Câu V.

1. Có thể có nhiều cách giải khác nhau. Nếu thí sinh làm cách khác mà tìm toạ độ các điểm G_1 và G_2 chấm theo thang điểm như tong đáp án. Nếu thí sinh chỉ tìm được một điểm G thì trừ 0,25 điểm.

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
KỲ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG NĂM2002
ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM
MÔN TOÁN KHỐI A

Câu	ý	Nội dung	ĐH
I	1	$m = 1 \Rightarrow y = -x^3 + 3x^2$ Tập xác định $\forall x \ni R$. $y' = -3x^2 + 6x = -3x(x-3)$, $y' = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases}$	$[\sum 1{,}0đ]$ 025đ

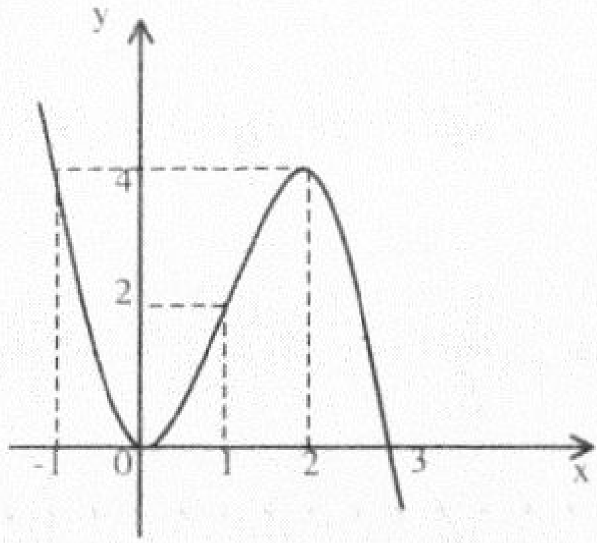
Bảng biên thiên

x	-∞	0	1	2	+∞
y'	-	0	+	0	-
y''		+	0	-	
y	+∞ ↘	lõm CT 0 ↗	U 2	4 CĐ lỗi ↘	-∞

0,5đ

$$y = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3, y(-1) = 4 \end{array}\right.$$

Đồ thị



(Thí sinh có thể lập 2 bảng biến thiên)

I	2	**Cách I:** Ta có $-x^3 + 3x^2 + k^3 - 3k^2 = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 3x^2 = -k^3 + 3k^2$. Đặt $a = -k^3 + 3k^2$ Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình $-x^3 + 3x^2 = a$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 0 < a < 4 \Leftrightarrow 0 < -k^3 + 3k^2 < 4$.	$\sum$ 0,5đ 0,25đ

		$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \neq k < 3 \\ (k+1)(k^2-4k+4) > 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \neq k < 3 \\ (k+1)(k-2)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < k < 3 \\ k \neq 0 \wedge k \neq 2 \end{cases}$ **Cách II:** Ta có $-x^3 + 3x^2 + k^3 - 3k^2 = 0$ $\Leftrightarrow (x-k)[x^2 + (k-3)x + k^2 - 3k] = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow f(x) = x^2 + (k-3)x + k^2 - 3k = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác k $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = -3k^2 + 6k + 9 > 0 \\ k^2 + k^2 - 3k + k^2 - 3k \neq 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < k < 3 \\ k \neq 0 \wedge k \neq 2 \end{cases}$	0,25đ 0,25đ 0,25đ
	3	**Cách I.** $y' = -3x^2 + 6mx + 3(1-m^2) = -3(x-m)^2 + 3$ $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = m-1 \\ x_2 = m+1 \end{cases}$ Ta thấy $x_1 \neq x_2$ và y' đổi dấu khi qua x_1 và $x_2 \Rightarrow$ hàm số đạt cực trị tại x_1 và x_2. $y_1 = y(x_1) = -m^2 + 3m - 2$ và $y_2 = y(x_2) = -m^2 + 3m + 2$ Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị $M_1(m-1; -m^2 + 3m - 2)$	$\sum$1,0đ 0,25đ 0,25đ 0,25đ

		và M_2 $(m+1; -m^2+3m+2)$ là $\frac{x-m+1}{2}=\frac{y+m^2-3m+2}{4}$ $\Leftrightarrow y = 2x - m^2 + m$ **Cách II.** $y' = -3x^2 + 6mx + 3(1-m^2) = -3(x-m)^2 + 3$ Ta thấy $\Delta' = 9m^2 + 9(1-m^2) = 9 > 0$ $\Rightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm $x_1 \neq x_2$. Ta có $y = -x^3 + 3mx^2 + 3(1-m^2)x + m^3 - m^2$ $= \left(\frac{1}{3}x - \frac{m}{3}\right)(-3x^2 + 6mx + 3 - 3m^2 + 2x - m^2 +$ Từ đây ta có $y_1 = 2x_1 - m^2 + m$ và $y_2 = 2x_2 - m^2 + m$ Vậy phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là $y = 2x - m^2 + m$	0,25đ 0,25 0,25đ 0,25đ 0,25đ
II	1.	Với $m = 2$ ta có $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 5 = 0$ Điều kiện $x > 0$. Đặt $t = \sqrt{\log_3^2 x + 1} \geq 1$ ta có $t^2 - 1 + t - 5 = 0 \Leftrightarrow t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = -3 \\ t_2 = 2 \end{array}\right.$ $t_1 = 3$ (loại), $t_2 = 2$ $\Leftrightarrow \log_3^2 = 3 \Leftrightarrow \log_3 x = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow x = 3^{\pm\sqrt{3}}$	$\sum$ 0,5đ 0,25đ 0,25đ

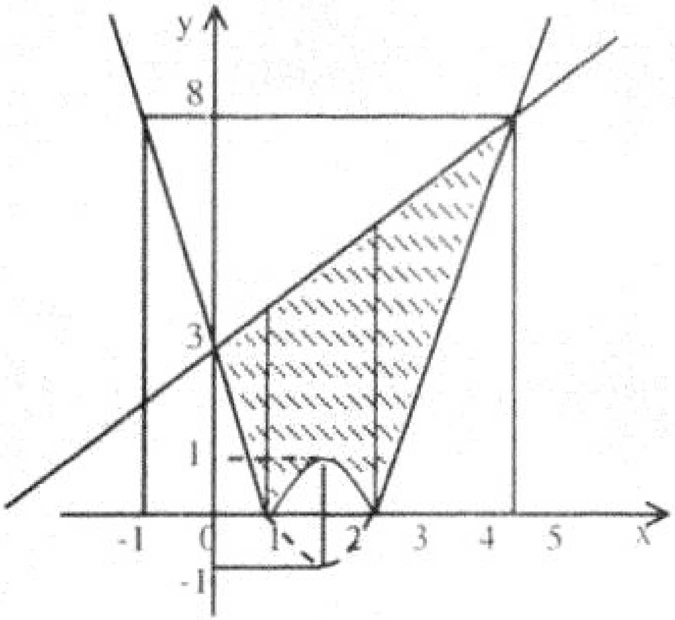
		$x = 3^{\pm\sqrt{3}}$ thoả mãn điều kiện $x > 0$. (Thí sinh có thể giải trực tiếp hoặc đặt ẩn phụ kiểu khác)	
	2.	$\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 1 = 0 \quad (2)$	$\sum$ 1.0đ
		Điều kiện $x>0$. Đặt $t = \sqrt{\log_3^2 x + 1} \geq 1$ Ta có $t^2 - 1 + t - 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + t - 2m - 2 = 0$ (3).	0,25đ
		$x \in \left[1, 3^{\sqrt{3}}\right] \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow 1 \leq t = \sqrt{\log_3^2 x + 1} \leq 2$ Vậy (2) có nghiệm $\in \left[1, 3^{\sqrt{3}}\right]$ khi và chỉ khi (3) có nghiệm $\in [1,2]$. Đặt $f(t) = t^2 + t$	0,25đ
		Cách 1. Hàm số $f(t)$ là hàm tăng trên đoạn $[1;2]$. Ta có $f(1) = 2$ và $f(2) = 6$ Phương trình $t^2 + t = 2m + 2$	0,25đ
		$\Leftrightarrow f(t) = 2m+2$ có nghiệm $\in [1;2]$ $\Leftrightarrow \begin{cases} f(t) \leq 2m+2 \\ f(t) \geq 2m+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq 2m+2 \\ 2m+2 \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 2$	0,25đ
		Cách 2. **TH1**. Phương trình (3) có 2 nghiệm t_1, t_2 thoả mãn $1 < t_1 \leq t_2 < 2$. Do $\frac{t_1 + t_2}{2} = -\frac{1}{2} < 1$ nên không tồn tại m.	0,25đ
		TH2. Phương trình (3) có 2 nghiệm t_1, t_2 thoả mãn $t_1 \leq 1 \leq t_2 \leq 2$ hoặc $1 \leq t_1 \leq 2 \leq t_2$	0,25đ

		(Thí sinh có thể dùng đồ thị, đạo hàm hoặc đặt ẩn phụ kiểu khác)	
II	1	$5\left(\sin x + \frac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2xin2x}\right) = \cos 2x + 3$ điều kiện $\sin 2x \neq -\frac{1}{2}$ Tacó $5\left(\sin x + \frac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2xin2x}\right)$ $= 5\left(\frac{\sin x + 2\sin x\cos 2x + \cos 3x + \sin 3x}{1 + 2\sin 2x}\right)$ $= 5\left(\frac{\sin x + \cos x - \cos 3x + \cos 3x + \sin 3x}{1 + 2\sin 2x}\right)$ $= \left(\frac{(2\sin 2x + 1)\cos x}{1 + 2\sin 2x}\right) = 5\cos x$ Vậy ta có: $5\cos x = \cos 2x + 3$ $\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$ $\cos x = 2$ (loại) hoặc $\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in Z)$	$\sum$ 1,0đ 0,25đ 0,25đ 0,25đ
		Vì $x \in (0;2\pi)$ nên lấy $x_1 = \frac{\pi}{3}$ và $x_2 = \frac{5\pi}{3}$. Ta thấy x_1, x_2 thoả mãn điều kiện $\sin 2x \neq -\frac{1}{2}$. Vậy các nghiệm cần tìm là:	0,25đ

$x_1 = \frac{\pi}{3}$ và $x_2 = \frac{5\pi}{3}$

(thí sinh có thể sử dụng các phép biến đổi khác).

2.



$\sum 1.0$đ

Ta thấy phương trình $\left|x^2 - 4x + 3\right| = x + 3$ có 2 nghiệm $x_1 = 0$ vùng $x_2 = 5$ 0,25đ

0,25đ

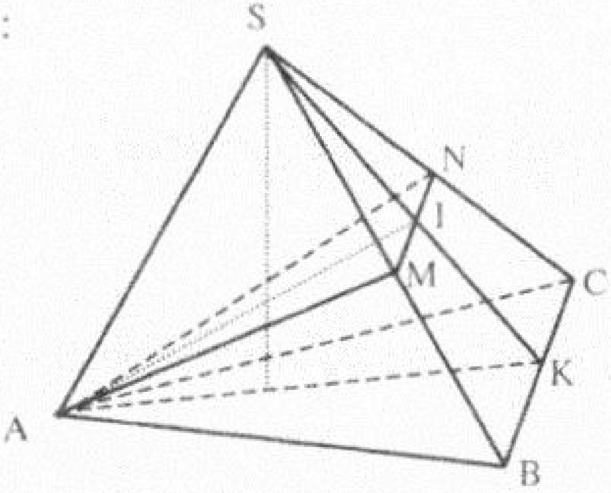
Mặt khác $\left|x^2 - 4x + 3\right| \le x + 3 \forall x \in [0;5]$. Vậy

$$S = \int_0^5 \left(x + 3 - \left|x^2 - 4x + 3\right|\right)dx$$

$$0S = \int_0^1 \left(-x^2 + 5x\right)dx + \int_1^3 \left(x^2 - 3x + 6\right)dx$$

$$+ \int_3^5 \left(-x^2 + 5x\right)dx$$

$$S = \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2\right)\Bigg|_0^1 + \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 6x\right)\Bigg|_1^3$$

		$+\left(-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2\right)\Big\|_3^5$ $S=\frac{13}{6}+\frac{26}{3}+\frac{22}{3}=\frac{109}{6}$ (đ.v.d.t) (nếu thí sinh vẽ hình thì không nhất thiết phải nêu bất đẳng thức $\left\|x^2-4x+3\right\|\le x+3\forall x\in[0;5]$	
V.	1.	Hình vẽ:  Gọi K là trung điểm của BC và I = SK ∩ MN. Từ giả thiết $\Rightarrow MN=\frac{1}{2}BC=\frac{a}{2}$, MN // BC ⇒ I là trung điểm của SK và MN. Ta có ΔSAB = ΔSAC ⇒ hai trung tuyến tương ứng AM = AN ⇒ ΔAMN cân tại A ⇒ AI ⊥ MN. Mặt khác $\begin{cases}(SBC)\perp(AMN)\\(SBC)\cap(AMN)=MN\\AI\subset(AMN)\\\Rightarrow AI\perp(SBC)\\\Rightarrow AI\perp SK\quad AI\perp MN\end{cases}$	$\sum$ 1đ 0,25đ 0,25đ

		Suy ra ΔSAK cân tại $A \Rightarrow SA = AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ $SK^2 = SB^2 - BK^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$ $\Rightarrow AI = \sqrt{SA^2 - SI^2} = \sqrt{SA^2 - \left(\frac{SK}{2}\right)^2}$ $= \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a}{8}} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$ Ta có $S_{\Delta AMN} = \frac{1}{2} MN.AI = \frac{a^2\sqrt{10}}{16}$ (dvdt) chú ý: 1. Có thể chứng minh $AI \perp MN$ như sau; $BC \perp (SAK) \Rightarrow MN \perp (SAK) \Rightarrow MN \perp AI$ 2. Có thể làm theo phương pháp toạ độ: Chẳng hạn chọn hệ toạ độ Đêcác vuông góc 0xyz sao cho K (0; 0; 0), $B\left(\frac{a}{2};0;0\right)$, $C\left(-\frac{a}{2};0;0\right)$ $A\left(0;\frac{-a\sqrt{3}}{2};0\right)$, $S\left(0;\frac{-a\sqrt{3}}{6};h\right)$ trong đó h là độ dài đường cao SH của hình chóp S.ABC.	0,25d 0,25d
	2a	**Cách I.** Phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng Δ_1 có dạng: $\alpha(x-2y+z-4) + \beta(x+2y-2y-2z+4) = 0$	$\sum$0,5d 0,25d

$(\alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$

$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)x - (2\alpha - 2\beta)y + (\alpha - 2\beta)z - 4\alpha + 4\beta = 0$

Vậy $\vec{n}_p = (\alpha + \beta; -2\alpha + 2\beta; \alpha - 2\beta$.

Ta có $\vec{u}_2 = (1;1;2) // \Delta_2$ và $M_2(1;2;1) \in \Delta_2$

0,25đ

$$(P) // \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_p.\vec{u}_2 = 0 \\ M_2(1;2;1) \notin (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ M_2 \notin (P) \end{cases}$$

Vậy (P): 2x - z = 0.

Cách II: Ta có thể chuyển phương trình Δ_1 sang dạng tham số như sau:

Từ phương trình Δ_1 suy ra 2x - z = 0. Đặt x = 2t

$$\Rightarrow \quad \Delta_1 \begin{cases} x = 2t' \\ y = 3t' - 2 \\ z = 4t' \end{cases}$$

$\Rightarrow M_1(0;-2;0) \in \Delta_1, \vec{u}_1 = (2;3;4) // \Delta_1$

(Ta có thể tìm tọa độ điểm $M_1 \in \Delta_1$ bằng cách cho x = 0 ⇒ y = -2; z = 0

và tính $\vec{u}_1 = \left(\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (2;3;4)$.

Ta có $\vec{u}_1 = (1;1;2) // \Delta_2$. Từ đó ta có véc tơ pháp của mặt phẳng (P) là: $\vec{n}_1 = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (2;0;-1)$.

0,25đ

Vậy phương trình mặt phẳng (P) đi qua M_1 (0;-2;0) và $\perp \vec{n}_p = (2;0;-1)$ là 2x - z = 0.

0,25đ

Mặt khác M_2 (1;2;1) $\notin$ (P) $\Rightarrow$ phương trình mặt phẳng cần tìm là: 2x - z = 0

	2b	**b Cách I:** $H \in \Delta_2 \Rightarrow H(1+t, 2+t, 1+2t)$ $\Rightarrow \vec{MH} = (t-1; t+1; 2t-3)$ $\Rightarrow MH = \sqrt{(t-1)^2 + (t+1)^2 + (2t-3)^2}$ $= \sqrt{6t^2 - 12t + 11} = \sqrt{6(t-1)^2 + 5}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $t = 1 \Rightarrow H(2;3;3)$. **Cách II:** $H \in \Delta_2 \Rightarrow H(1+t, 2+t, 1+2t)$ MH nhỏ nhất $\Leftrightarrow MH \perp \Delta_2$ $\Leftrightarrow \vec{MH}.\vec{u}_2 = 0 \quad \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow H(2;3;3)$	$\sum$0,5d 0,25d 0,25d 0,25d 0,25d
V	1	Ta có $BC \cap 0x = B(1;0)$. Đặt $x_A = a$ ta có $A(a;0)$ và $x_C = a \Rightarrow y_C = \sqrt{3a} - \sqrt{3}$. Vậy $C\left(a; \sqrt{3a} - \sqrt{3}\right)$ Từ công thức $\begin{cases} x_G = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C) \\ y_G = \frac{1}{3}(y_A + y_B + y) \end{cases}$ Ta có $G\left(\frac{2a+1}{3}; \frac{\sqrt{3}(a-1)}{3}\right)$ **Cách I.** Ta có: $AB = \|a-1\|, AC = \sqrt{3}\|a-1\|, BC = 2\|a-1\|$. Do đó $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{\sqrt{3}}{2}(a-1)^2$	$\sum$0,5d 0,25d

Ta có

$$r = \frac{2S}{AB + AC + BC} = \frac{\sqrt{3}(a-1)^2}{3|a-1| + \sqrt{3}|a-1|}$$

$$= \frac{|a-1|}{\sqrt{3}+1} = 2$$

0,25đ

Vậy $|a-1| = 2\sqrt{3} + 2$

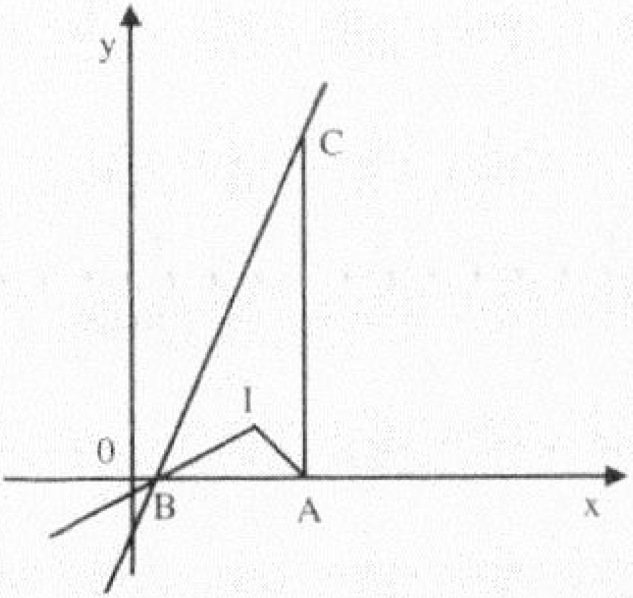
TH1 $a_1 = 2\sqrt{3} + 3 \Rightarrow G_1\left(\frac{7 + 4\sqrt{3}}{3}; \frac{6 + 2\sqrt{3}}{3}\right)$

TH2

$a_2 = -2\sqrt{3} - 1 \Rightarrow G_2\left(\frac{-4\sqrt{3} - 1}{3}; \frac{-6 - 2\sqrt{3}}{3}\right)$

0,25đ

Cách II.



0,25đ

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

Vì $r = 2 \Rightarrow y_I = \pm 2$.

		Phương trình BI:	0,25đ
		$y = tg30^0(x-1) = \frac{x-1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x_1 = 1 \pm 2\sqrt{3}$	
		TH1: Nếu A và O khác phía đối với B	0,25đ
		$\Rightarrow x_1 = 1 + 2\sqrt{3}$ từ d(I,AC) = 2	
		$\Rightarrow a = x_1 + 2 = 3 + 2\sqrt{3} \Rightarrow G_1\left(\frac{7+4\sqrt{3}}{3}; \frac{6+2\sqrt{3}}{3}\right)$	
		TH2: Nếu A và O cùng phía đối với B	
		$\Rightarrow x_1 = 1 - 2\sqrt{3}$ tương tự ta có	
		$a = x_1 - 2 = -1 - 2\sqrt{3}$	
		$\Rightarrow G_2\left(\frac{-4\sqrt{3}-1}{3}; \frac{-6-2\sqrt{3}}{3}\right)$	
	2	Từ $C_n^3 = 5C_n^1$ Ta có $n \geq 3$ và	$\sum$1đ 0,25
		$\frac{n!}{3!(n-3)!} = 5\frac{n!}{(n-1)!} \Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 5n$	
		$\Leftrightarrow n^2 - 3n - 28 = 0 \Rightarrow n_1 = -4$(loại) $n_2 = 7$	0,25đ
		Với n= 7 ta có	
		$C_7^3\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^4\left(2^{\frac{-x}{3}}\right)^3 = 140 \Leftrightarrow 35.2^{2x-2}.2^{-x} = 140$	
		$\Leftrightarrow 2^{x-2} = 4 \Leftrightarrow x = 4$	0,25đ

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG NĂM 2002

Môn thi: TOÁN, Khối B.

(Thời gian làm bài: 180phút)

Câu I. (ĐH: 2,0 điểm; CĐ; 2,5điểm)

Cho hàm số: $y = mx^4 + (m^2 - 9)x^2 + 10$ (1) (m là tham số).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 1$.

2. Tìm m để hàm số (1) có ba điểm cực trị.

Câu II: (ĐH: 3.0điểm; CĐ: 3.0điểm).

1. Giải phương trình: $\text{Sin}^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x$.

2. Giải bất phương trình: $\log_x(\log_3(9^x - 72)) \le 1$.

3. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt[3]{x - y} = \sqrt{x - y} \\ x + y = \sqrt{x + y + 2} \end{cases}$

Câu III.(ĐH: 1,0điểm; CĐ: 1,5điểm).

Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường:

$$y = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} \quad \text{và} \quad y = \frac{x^2}{4\sqrt{2}}$$

Câu IV. (ĐH: 3,0điểm, CĐ: 3.0điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Đêcac vuông góc 0xy cho hình chữ nhật ABCD có tâm $I\left(\frac{1}{2};0\right)$. Phương trình đường thẳng AB là $x - 2y + 2 = 0$ và $AB = 2AD$. Tìm toạ độ các đỉnh A, B, C, D biết rằng đỉnh A có hoành độ âm.

2. Cho hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng a.

a. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng A_1B và B_1D.

b. Gọi M, N, P lần lượt là các trung điểm của cacư cạnh BB_1, CD, A_1D_1. Tính góc giữa hai đường thẳng MP và C_1N.

Câu V. (ĐH: 1,0điểm).

Cho đa giác đều $A_1A_2...A_{2n}$ ($n \geq 2$, n nguyên) nội tiếp đường tròng (0). Biết rằng số tam giác có các đỉnh là 3 trong 2n điểm A_1, $A_2,...,A_{2n}$ nhiều gấp 20 lần số hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong 2n điểm A_1, $A_2...,A_{2n}$, tìm n.

Ghi chú: 1. Thí sinh chỉ thi cao đẳng không làm câu IV 2.b. và Câu V.

2. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh......................Số báo danh:......................

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

KỲ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG NĂM 2002

HƯỚNG DẪN CHẤM THI MÔN TOÁN KHỐI B

Bản đáp án và thang điểm đề thi chính thức môn toán khối B đã được trình bày lời giải với thang điểm chi tiết. Cán bộ chấm thi cần căn cứ vào đó để thống nhất cách chấm và cho điểm.

Đáp án chi tiết chỉ trình bày nhiều nhất là hai cách giải, trong khi đó mỗi bài toán có thể có nhiều phương pháp giải pháp khác nhau. Vì vậy cần lưu ý một số điểm trong từng câu như sau:

Câu I:

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số:

+ Có thể thí sinh lập 2 bảng biến thiên để xét sự biến thiên và xét khoảng lồi lõm riêng (không giống như đáp án. Trong trường hợp đó nếu kết quả đúng thì không trừ điểm.

2. Tìm m để hàm số có 3 điểm cực trị.

Thí sinh có thể xét riêng các trường hợp $m = 0$ và $m \neq 0$.

Câu II:

1. Giải phương trình lượng giác:

Thí sinh có thể dùng các cách biến đổi khác nhau để dẫn đến giải phương trình cơ bản. Trong trường hợp thí sinh lấy đủ nghiệm nhưng không kết hợp nghiệm thì không trừ điểm.

2. Giải bất phương trình.

Thí sinh không đặt điều kiện và cũng không kiểm tra nghiệm nhưng kết quả đúng thì trừ 0,25điểm.

Thí sinh không đặt điều kiện và biến đổi bất phương trình mà không chú ý đến cơ số để dẫn đến kết quả dù có đúng một phần nào đó thì cho tối đa không quá 0,25điểm.

3. Giải hệ phương trình.

Nếu bài làm thí sinh không đặt điều kiện và không thử lại nghiệm thì trừ 0,5 điểm.

Nếu thí sinh không đặt điều kiện nhưng có thử lại nghiệm thì không trừ điểm.

Câu III.

Một trong những điểm quan trọng của câu này là phải chỉ ra.

$$S = 2\int_0^{\sqrt{8}} \left(\sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} - \frac{x^2}{4\sqrt{2}} \right) dx$$

Nếu thí sinh vẽ hình đúng thì xem như đạt yêu cầu này. Nếu thí sinh không vẽ hình thì phải nhận xét được.d

$$\sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} \geq \frac{x^2}{4\sqrt{2}} \; \forall x \in \left[0; \sqrt{8}\right]$$

Nếu thí sinh không làm cả hai việc trên thì trừ 0,25điểm.

Câu IV.

1. Tính toạ độ các đỉnh của hình chữ nhật

Với bài toán này, nếu tìm được tọa độ hai đỉnh kề nhau thì có tính được tọa độ hai đỉnh còn lại nhờ tính chất của tâm đối xứng.

Nếu thí sinh chỉ tính được tọa độ hai đỉnh kề nhau (tọa độ hai đỉnh còn lại chưa tính được) thì trừ 0,25 điểm. Nếu thí sinh chỉ tính được tọa độ hai đỉnh đối xứng nhau qua tâm thì trừ 0,5 điểm.

2a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng A_1B và B_1D.

Nếu làm bằng phương pháp hình học tổng hợp (hình không gian lớp 11) mà thí sinh chỉ đưa ra đoạn vuông góc chung của A_1B và B_1D mà không chứng minh đó là đoạn vuông góc chung thì trừ 0,5 điểm.

Câu V. Tìm m.

Bài toán này có các cách lý luận khác nhau để tìm số hình chữ nhật. Căn cứ bài làm đúng đến đâu thì cho điểm đến đó.

BỘ GIÁO DỤC VÀ
ĐÀO TẠO

KỲ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG NĂM 2002
ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM ĐỀ THI CHÍNH THỨC
MÔN TOÁN KHỐI B

Câu	**ý**	**Nội dung**	**ĐH**
I	1	Với m = 1 ta có $y = x^4 - 8x^2 + 10$ là hàm chẵn $\Rightarrow$ đồ thị đối xứng qua Oy. Tập xác định $\forall x \in R$, $y' = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4)$, $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$ $y'' = 12x^2 - 16 = 12\left(x^2 - \frac{4}{3}\right)$, $y'' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sum$1.0d 0.25d

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		$\frac{-2}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{2}{\sqrt{3}}$		2		$+\infty$
y'		-	0		+		0		-		0	+	
y''			+		0		-		0		+		
y	$+\infty$	↘	lõm CT -6	↗	U	↗	10 CĐ lồi	↘	U	↘	lõm CT -6		$-\infty$

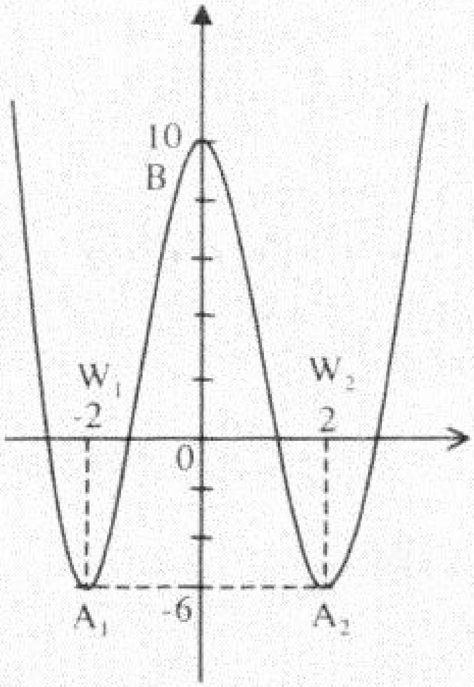
0,25đ

Hai điểm cực tiểu: A_1 (-2; - 6) và A_2 (2; - 6).
Một điểm cực đại: B (0;10).

Hai điểm uốn: $U_1\left(\frac{-2}{\sqrt{3}};\frac{10}{9}\right)$ và $U_2\left(\frac{2}{\sqrt{3}};\frac{10}{9}\right)$

Giao điểm của đồ thị với trục tung là B (0;10)
Đồ thị cắt trục hoành tại 4 điểm có hoành độ:

$x = \pm\sqrt{4+\sqrt{6}}$ và $x = \pm\sqrt{4-\sqrt{6}}$

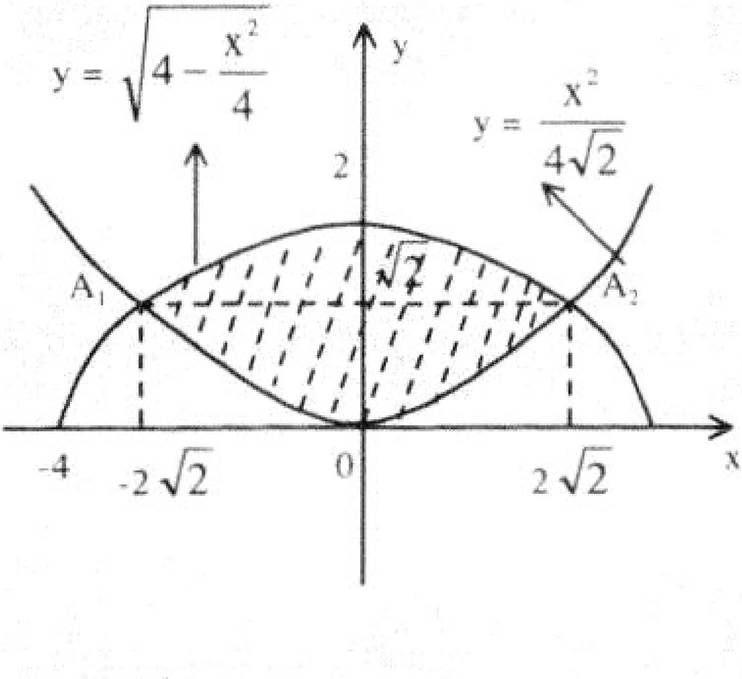


0,25đ

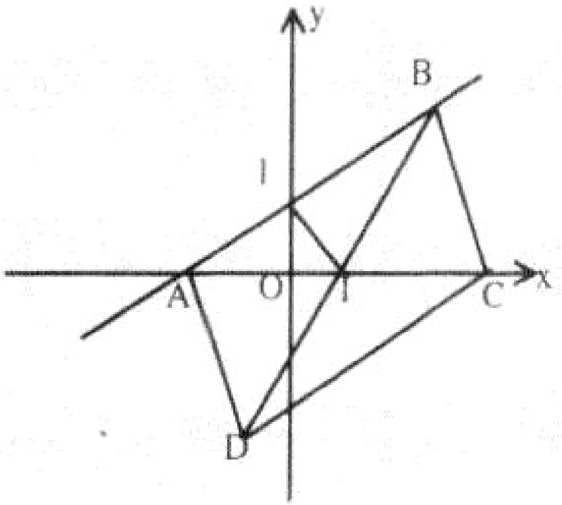
(Thí sinh có thể lập 2 bảng biến thiên)

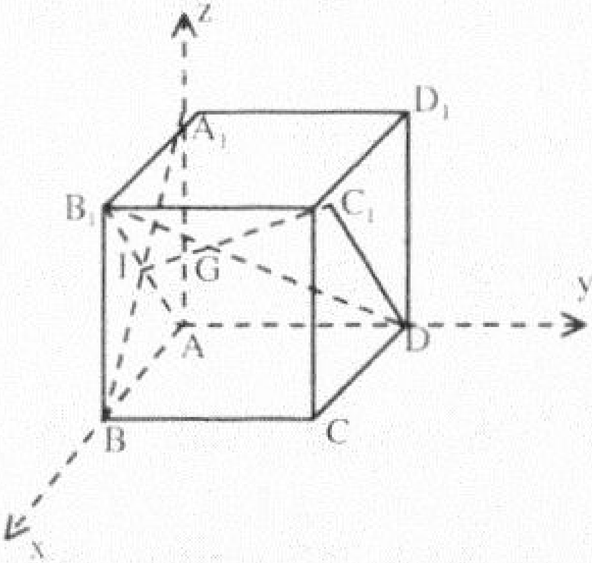
I	2	$y' = 4mx^3 + 2(m^2 - 9)x = 2x(2mx^2 + m^2 - 9$	$\sum 1,0$
		$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2mx^2 + m^2 - 9 = 0 \end{array}\right.$	0,25đ
		Hàm số có ba điểm cực trị ⇔ phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt (khi có y' đổi dấu khi qua các nghiệm của phương trình $2mx^2 + m - 9 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0.	
		$2mx^2 + m - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ x^2 = \dfrac{9 - m^2}{2m}. \end{cases}$	0,25đ
		Phương trình $2mx^2 + m^2 - 9 = 0$ có 2 nghiệm khác 0 $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \prec -3 \\ 0 \prec m \prec 3. \end{array}\right.$	
		Vậy hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \prec -3 \\ 0 \prec m \prec 3. \end{array}\right.$	0,25đ
II	1	$\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x$	$\sum 1,0$
		$\Leftrightarrow \dfrac{1 - \cos 6x}{2} - \dfrac{1 + \cos 8x}{2} = \dfrac{1 - \cos 10x}{2} - \dfrac{1 + \cos 12x}{2}$	0,25đ
		$\Leftrightarrow (\cos 12x + \cos 10x) - (\cos 8x + \cos 6x) = 0$	
		$\Leftrightarrow \cos x(\cos 11x - \cos 7x) = 0$	0,25đ
		$\Leftrightarrow \cos x \sin 9x \sin 2x = 0$	

		$\Leftrightarrow \sin 9x \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{k\pi}{9} \\ x = \frac{k\pi}{2} \end{array}\right. k \in Z$ Chú ý: Thí sinh có thể sử dụng các cách biến đổi khác để đưa về phương trình tích.	0,5đ
	2	$\log_x(\log_3(9^x\text{-}72)) \le 1$ (1). điều kiện: $\begin{cases} x \succ 0, x \ne 1 \\ 9^x - 72 \succ 0 \\ \log_3(9^x - 72) \succ 0 \end{cases}$ (2) $\Leftrightarrow 9^x - 72 \succ 1 \Leftrightarrow x \succ \log_3 73$ do $x > \log_9 73 > 1$ nên (1) $\Leftrightarrow \log_3(9^x - 72) \le x$ $\Leftrightarrow 9^x - 72 \le 3^x \Leftrightarrow (3^x)^2 + 3^x - 72 \le 0$ (3) Đặt $t = 3^x$ thì (3) trở thành $t^2 - t - 72 \le 0 \Leftrightarrow - 8 \le 1 \le 9 \Leftrightarrow -8 \le 3^x \le 0 \Leftrightarrow x \le 2$. Kết hợp với điều kiện (2) ta được nghiệm của bất phương trình là: $\log_9 73 < x \le 2$.	$\sum$1,0đ 0,25đ 0,25đ 0,25đ 0,25đ
	3	$\begin{cases} \sqrt[3]{x-y} = \sqrt{x-y} & (1) \\ x + y = \sqrt{x+y+2} & (2) \end{cases}$ Điều kiện $\begin{cases} x - y \ge 0 \\ x + y \ge 0 \end{cases}$ (3) (1) $\Leftrightarrow \sqrt[3]{x-y}\left(1 - \sqrt[6]{x-y}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = y + 1 \end{array}\right.$ Thay x = y vào (2), giải ra ta có: x = y= 1	$\sum$1,0 0,25đ 0,25đ

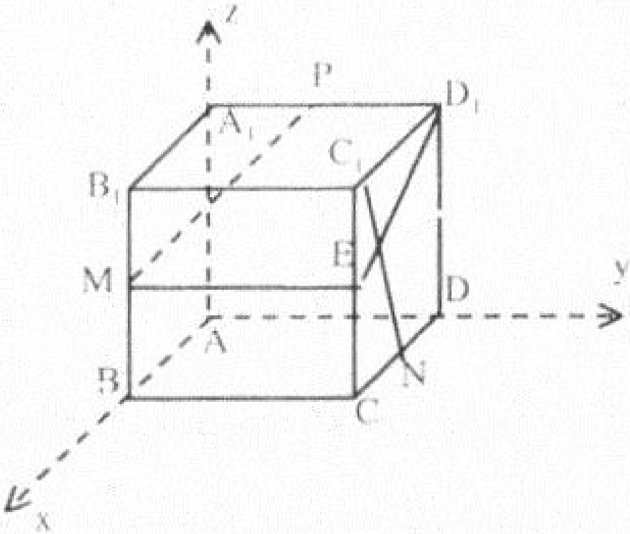
		Thay x = y + 1 vào (2), giải ra ta có: $x = \frac{3}{2}, y = \frac{1}{2}$ Kết hợp với điều kiện (3) hệ phương trình có 2 nghiệm: $x = 1, y = 1$ và $x = \frac{3}{2}, y = \frac{1}{2}$ Chú ý: Thí sinh có thể nâng hai vế của (1) lên luỹ thừa bậc 6 để đi đến kết quả: $\left[\begin{array}{l} x = y \\ x = y + 1 \end{array}\right.$	0,25đ 0,25đ
III		 $y = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}$ y $y = \frac{x^2}{4\sqrt{2}}$ 2 $\sqrt{2}$ A_1 A_2 -4 $-2\sqrt{2}$ 0 $2\sqrt{2}$ x Tìm giao điểm của hai đường cong $y = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}$ và $y = \frac{x^2}{4\sqrt{2}}$	Σ1,0 0,25đ

		$\sqrt{4-\frac{x^2}{4}} = \frac{x^2}{4\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{x^4}{32}+\frac{x^2}{4}-4=0$ $\Leftrightarrow x^2 = 8 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{8}$ Trên $\left[-\sqrt{8};\sqrt{8}\right]$ ta có $\frac{x^2}{4\sqrt{2}} \le \sqrt{4-\frac{x^2}{4}}$ và do hình đối xứng qua trục tung nên $S = 2\int_0^{\sqrt{8}}\left(\sqrt{4-\frac{x^2}{4}}-\frac{x^2}{4\sqrt{2}}\right)dx$ $= \int_0^{\sqrt{8}}\sqrt{16-x^2}\,dx - \frac{1}{2\sqrt{2}} = \int_0^{\sqrt{8}} x^2dx = S_1 - S$	0,25đ
		Để tính S_1 ta dùng phép đổi biến x = 4sint. Khi $0 \le 1 \le \frac{\pi}{4}$ thì $0 \le x \le \sqrt{8}$ $dx = 4\cos t dt$ và $\cos t > 0\ \forall\ t \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right]$. Do đó $S_1 = \int_0^{\sqrt{8}}\sqrt{16-x^2}\,dx = 16\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 t dt$ $= 8\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2t)dt = 2\pi + 4$	0,25đ
		$S_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{8}} x^2dx = \frac{1}{6\sqrt{2}}x^3\Big\vert_0^{\sqrt{8}} = \frac{8}{3}$	0,25đ

		Vậy $S = S_1 - S_2\ 2\pi + \frac{4}{3}$ Chú ý: Thí sinh có thể tính diện tích $S = \int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}}\left(\sqrt{4-\frac{x^2}{4}} - \frac{x^2}{4\sqrt{2}}\right)dx$	
IV	1		$\sum 1{,}0$
		Khoảng cách từ I đến đường thẳng AB bằng $\frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow AD = \sqrt{5}$ và $IA = IB = \frac{5}{2}$	0,25đ
		Do đó, A, B là các giao điểm của đường thẳng AB với đường tròn tâm I và bán kính $R = \frac{5}{2}$. Vậy tọa độ A, B là nghiệm của hệ:	0,25đ
		$\begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \end{cases}$	0,25đ
		Giải hệ ta được A(-2;0), B (2; 2) (Vì $x_A < 0$)	0,25đ

	$\Rightarrow$ C (3;0), D (-1; -2). Chú ý: Thí sinh có thể tìm toạ độ điểm H là hình chiếu của I trên đường thẳng AB. Sau đó tìm A, B là giao điểm của đường tròn tâm H bán kính HA với đường thẳng AB.	
2a	Tìm khoảng cách giữa A_1B và B_1D_1.	$\sum$1.0đ
	 z D1 A1 B1 C1 I K G y A D B C x	
	Cách I: Chọn hệ toạ độ Đề các vuông góc 0xyz sao cho: A(0;0;0), B(0;a;0), D(0;0;a) $\Rightarrow$ C (a;0;a); B_1(a;0;a); C_1(a;a;a); D_1(o;a;a)	0,25đ
	$A_1\vec{B} = (a;0;-a), B_1\vec{D} = (-a;a;-a),$ $A_1B_1 = (a;0;0)$ và $\left[A_1\vec{B}, B_1\vec{D}\right] = (a^2;2a^2;a^2)$	0,25đ
	Vậy $d(A_1B, B_1D) = \dfrac{\left\lvert\left[A_1\vec{B}, B_1\vec{D}\right]A_1B_1\right\rvert}{\left\lvert\left[A_1B, B_1D\right]\right\rvert} = \dfrac{a^3}{a^2\sqrt{6}} = \dfrac{a}{\sqrt{6}}$	0,25đ

		Cách II:	0,25d
		$\left.\begin{array}{l}A_1B\perp AB_1\\ A_1B\perp AD\end{array}\right\}\Rightarrow A_1B\perp(AB_1C_1D)\Rightarrow A_1B\perp B_1D$ Tương tự $A_1C_1\perp B_1D\Rightarrow B_1D\perp(A_1BC_1)$.	
		Gọi $G = B_1D\cap(A_1BC_1)$. Do $B_1A_1 = B_1B = B_1C_1 = a$ nên $GA_1 = GB = GC_1 \Rightarrow G$ là tâm tam giác đều A_1BC_1 có cạnh bằng $a\sqrt{2}$. Gọi I là trung điểm của A_1B thì IG là đường vuông góc chung của A_1B và B_1D, nên	0,25d
		$d(A_1B,B_1D)=IG=\frac{1}{3}C_1I=\frac{1}{3}A_1B\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{a}{\sqrt{6}}$	0,25d
		Chú ý: Thí sinh có thể viết phương trình mặt phẳng (P) chứa A_1B và song song với B_1D là: $x + 2y + z - a = 0$ và tính khoảng cách từ B_1 (hoặc từ D tới (P) hoặc viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa B_1D và song song với A_1B là: $x + 2y + z - 2a = 0$ và tính khoảng cách từ A_1 (hoặc từ B) tới (Q)	0,25d
	2b	**Cách I:**	$\sum$ 1,0đ
		Từ cách I của 2a ta tìm được	0,25đ
		$M\left(a;0;\frac{a}{2}\right), N\left(\frac{a}{2};a;0\right), P\left(0;\frac{a}{2};a\right)$	0,25đ
		$\Rightarrow \overrightarrow{MP}=\left(-a;\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right), \overrightarrow{NC_1}=\left(\frac{a}{2};a;0\right)\Rightarrow \overrightarrow{MP}.\overrightarrow{NC_1}=0$	0,25đ
		Vậy $MP\perp C_1N$.	

		 z P D_1 A_1 C_1 B_1 E M D y A B N C x Gọi E là trung điểm của CC_1 thì $ME \perp (CDD_1C_1)$ $\Rightarrow$ hình chiếu vuông góc của MP trên (CDD_1C_1) là ED_1. Ta có $\Delta C_1CN = \Delta D_1C_1E \Rightarrow C_1D_1E = CC_1N = 90^0 - D_1C_1N \Rightarrow D_1E \perp C_1N$. Từ đây theo định lý ba đường vuông góc ta có $MP \perp C_1N$.	0,25đ 0,25đ 0,25đ 0,25đ
V		Số tam giác có các đỉnh là 3 trong 2n điểm $A_1, A_2 \ldots A_{2n}$ là C_{2n}^3 Gọi đường chéo của đa giác đều $A_1, A_2 \ldots A_{2n}$ đi qua tâm đường tròng (0) là đường chéo lớn thì đa giác đã cho có n đường cheo lớn. Mỗi hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong 2n điểm $A_1, A_2 \ldots A_{2n}$ có các đường chéo là hai đường chéo lớn. Ngược lại, với mỗi cặp đường chéo lớn ta có các đầu mút của chúng là 4 đỉnh của một hình chữ nhật. Vậy số hình chữ nhật nói trên bằng số cặp đường chéo lớn của đa giác $A_1, A_2 \ldots A_{2n}$ tức C_n^2 Theo giả thiết thì:	$\sum 1.0$ 0,25đ 0,25đ

		$C_{2n}^3 = 20C_n^2 \Leftrightarrow \frac{(2n)!}{3!(2n-3)!} = 20\frac{n!}{2!(n-2)!}$ $\Rightarrow \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6} = 20\frac{n(n-1)}{2}$ $\Leftrightarrow 2n - 1 = 15 \Leftrightarrow n = 8.$ **Chú ý:** Thí sinh có thể tìm số hình chữ nhật bằng các cách khác. Nếu lý luận đúng để đi đến kết quả số hình chữ nhật là $\frac{n(n-1)}{2}$ thì cho điểm tối đa phần này.	0,5đ

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG
NĂM 2002
Môn thi: TOÁN, Khối D
(Thời gian làm bài: 180phút)

Câu I (ĐH: 3 điểm; CĐ: 4 điểm).

Cho hàm số $y = \frac{(2m-1)x - m^2}{x - 1}$ (1) (m là tham số).

1.Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1) ứng với m = -1.

2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng cong (C) và hai trục toạ độ.

3. Tìm m để đồ thị của hàm số (1) tiếp xúc với đường thẳng y=x.

Câu II (ĐH; 2 điểm; CĐ: 3 điểm).

1. Giải bất phương trình: $(x^2 - 3x)\sqrt{2x^2 - 3x - 2} \geq 0$

2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2^{3x} = 5y^2 - 4y. \\ \frac{4^x + 2^{x+1}}{2^x + 2} = y \end{cases}$

Câu III (ĐH: 1 điểm; CĐ: 1 điểm).

Tìm x thuộc đoạn $[0;14]$ nghiệm đúng phương trình:

$$\cos 3x - 4\cos 2x + 3\cos x - 4 = 0.$$

Câu IV (ĐH: 2 điểm; CĐ: 2điểm).

1. Cho hình tứ diện ABCD có cạnh AD vuông góc với mặt phẳng (ABC): AC = AD = 4cm; AB = 3cm; BC = 5cm. Tính khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng (BCD).

2. Trong không giang với hệ toạ độ Đềcác vuông góc 0xyz, cho mặt phẳng (P): $2x - y + 2 = 0$

và đường thẳng d_m: $\begin{cases}(2m+1)x + (1-m)y + m - 1 = 0\\ mx + (2m+1)z + 4m + 2 = 0\end{cases}$ (m là tham số)

Xác định m để đường thẳng d_m song song với mặt phẳng (P).

Câu V (ĐH: 2 điểm).

1. Tìm số nguyên dương n sao cho

$$C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + ... + 2^n C_n^n = 243$$

2. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ đềcac vuông góc 0xy, cho elíp (E) có phương trình $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. Xét điểm M chuyển động trên tia 0x và điểm N chuyển động trên tia Oy sao cho đường thẳng MN luôn tiếp xúc với (E). Xác định tọa độ của M, N để đoạn MN có độ dài nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó.

Chú ý:

1. Thí sinh chỉ thi cao đẳng không làm câu V.

2. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:........................Số báo danh:.................

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG

NĂM 2002

HƯỚNG DẪN CHẤM THI MÔN TOÁN KHỐI D

Câu I.

1. Nếu TS làm sai ở bước nào thì kể từ đó trở đi sẽ không được điểm.

2. Nếu TS xác định đúng hàm số và chỉ tìm đúng 2 tiệm cận thì được 1/4 điểm.

3. Nếu TS làm sai ở bước nào thì kể từ đó trở đi sẽ không được điểm.

- Nếu TS không loại giá trị $m = 1$ thì bị trừ 1/4 điểm.

Câu II:

1. Nếu TS làm sai ở bước nào thì kể từ đó trở đi sẽ không được điểm.

- Nếu TS kết luận nghiệm sai bị trừ 1/4 điểm.
- Nếu TS sử dụng điều kiện sai:

$$f(x).g(x) \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \le 0 \\ g(x) \le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \ge 0 \\ g(x) \ge 0 \end{cases} \end{array}\right.$$ và dẫn đến kết quả đúng sẽ bị trừ 1/4đ

Câu III:

TS làm đúng bước nào được điểm bước đó.

Câu IV.

TS làm đúng bước nào được điểm đúng bước đó.

Câu V.

1. TS làm đúng bước nào được điểm đúng bước đó.

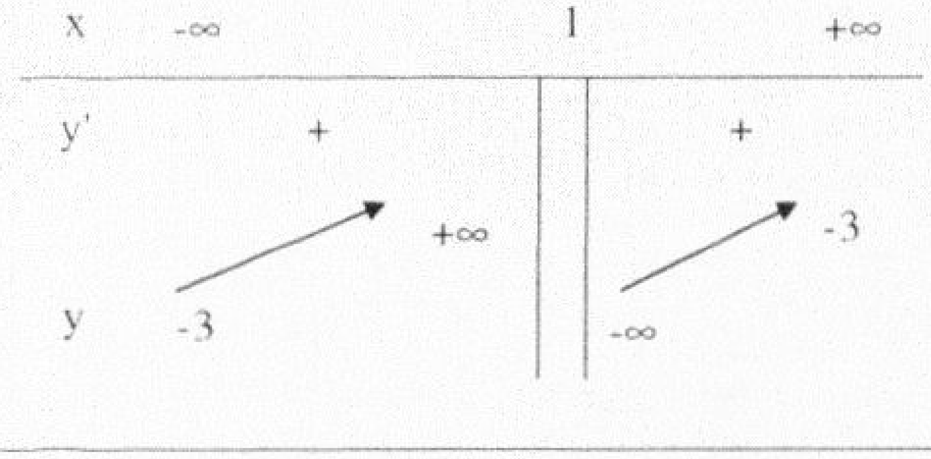
2. TS làm đúng bước nào được điểm đúng bước đó.

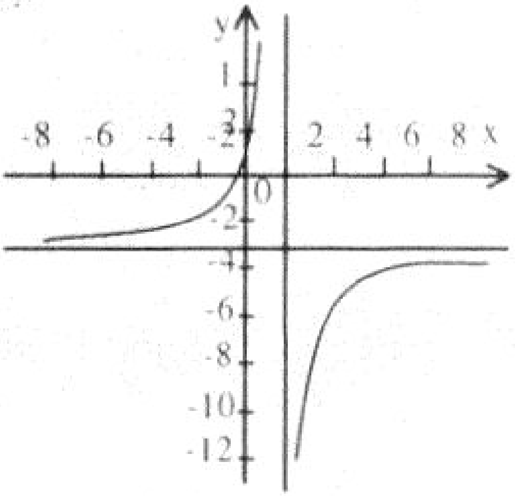
BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

KỲ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG NĂM 2002

MÔN TOÁN KHỐI D

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM ĐỀ THI CHÍNH THỨC

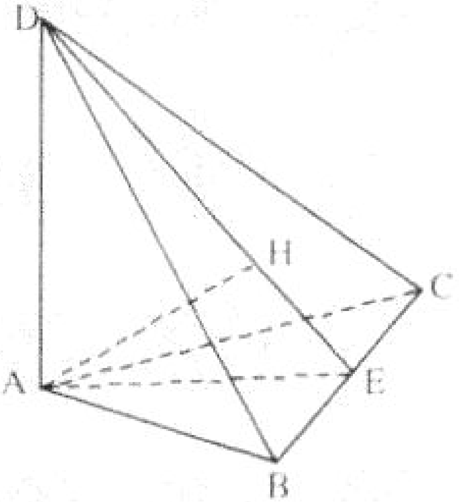
Câu	Nội dung	Điểm
I		ĐH 3đ
	1. Khi m = -1, ta có $y = \frac{-3x-1}{x-1} = -3 - \frac{4}{x-1}$ - TXĐ: $x \neq 1$. - CBT: $y' = \frac{4}{(x-1)^2} > 0, \forall x \neq 1 \Rightarrow$ hàm số không có cực trị $\lim\limits_{x \to \infty} y = -3; \lim\limits_{x \to 1^-} y = +\infty; \lim\limits_{x \to 1^+} y = -\infty$ Bảng biến thiên 	1 1/4 1/4

	-TC: x = 1 là tiệm cận đứng vì $\lim\limits_{x\to1} y=\infty$	
	y = -3 là tiệm cận ngang vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=-3$	1/4
	- Giao với các trục: x = 0 ⇒ y = 1; y = 0 ⇒ x = -1/3	
	- Đồ thị: 	
	2.	1
	Diện tích cần tính là:	
	$S=\int\limits_{-1/3}^{0}\left(\frac{-3x-1}{x-1}\right)dx$	1/4
	$=\int\limits_{-1/3}^{0}dx-4x\int\limits_{-1/3}^{0}\frac{dx}{x-1}$	/4
	$=-3.\frac{1}{3}-4\ln\lvert x-1\rvert\Big\|_{-1/3}^{0}$	/4
	$=-1+4\ln\frac{4}{3}$ (dvdt)	/4

	3. Ký hiệu $f(x)=\frac{(2m-1)x-m^2}{x-1}$. Yêu cầu bài toán tương đương với tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm:	1
	(H) $\begin{cases} f(x)=x \\ f'(x)=(x)' \end{cases}$	1/4
	Ta có (H) $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-(x-m)^2}{x-1}=0 \\ \left(\frac{-(x-m)^2}{x-1}\right)=0 \end{cases}$	1/4
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-(x-m)^2}{x-1}=0 \\ \frac{-2(x-m)(x-1)+(x-m)^2}{(x-1)^2}=0 \end{cases}$	1/4
	Ta thấy với $\forall m \neq 0$; $x = m$ luôn thoả mãn hệ (H). Vì vậy $\forall m \neq 1$, (H) luôn có nghiệm, đồng thời khi $m = 1$ thì hệ (H) vô nghiệm. Do đó đồ thị hàm số (1) tiếp xúc với đường thẳng $y = x$ khi và chỉ khi $m \neq 1$. Đáp số $m \neq 1$.	1/4
II	1.	2đ
	Bất phương trình $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2x^2-3x-2}=0 \\ \begin{cases} \sqrt{2x^2-3x-2}>0 \\ x^2-3x\geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$	1/4

	TH1: $\sqrt{2x^2-3x-2}=0 \Leftrightarrow 2x^2-3x-2=0$ $\Leftrightarrow x=2 \vee x=-\frac{1}{2}$	1/4
	TH2: $\sqrt{2x^2-3x-2}\succ 0$ $x^2-3x\geq 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases}2x^2-3x-2\succ 0\\ x^2-3x\geq 0\end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases}x\prec -\frac{1}{2}\vee x\succ 2\\ x\leq 0\vee x\geq 3\end{cases}$	1/4
	$x\prec -\frac{1}{2}\vee x\geq 3$	1/4
	Từ hai trường hợp trên suy ra ĐS: $x\leq -\frac{1}{2}\vee x=2\vee x\geq 3$	1/4
	2. Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases}2^{3x}=5y^2-4y\\ 2^x=y\end{cases}$	1/4
	$\Leftrightarrow \begin{cases}2^x=y\succ 0\\ y^3-5y^2+4y=0\end{cases}$	1/4
	$\Leftrightarrow \begin{cases}2^x=y\succ 0\\ y=0\vee y=1\vee y=4\end{cases}$	1/4
	$\Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\ y=1\end{cases}\vee\begin{cases}x=2\\ y=4\end{cases}$	1/4

III	Phương trình	1đ
	$\Leftrightarrow (\cos 3x + 3\cos x) - 4(\cos 2x + 1) = 0$	
	$\Leftrightarrow 4\cos^3 x - 8\cos^2 x = 0$	
	$\Leftrightarrow 4\cos^2 x(\cos x - 2) = 0$	
	$\Leftrightarrow \cos x = 0$	1/4
	$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$	1/4
	$x \in [0;14] \Leftrightarrow k = 0 \vee k = 1 \vee k = 2 \vee k = 3$	1/4
	ĐS: $x = \frac{\pi}{2}$; $x = \frac{3\pi}{2}$; $x = \frac{5\pi}{2}$; $x = \frac{7\pi}{2}$	1/4
V	1.	2đ
	Cách 1	1
	Từ giả thiết suy ra tam giác ABC vuông tại A, do đó AB ⊥ AC.	1/4
	Lại có AD ⊥ mp(ABC) ⇒ AD ⊥ AB và AD ⊥AC, nên AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau.	1/4
	Do đó có thể chọn hệ toạ độ Đêcác vuông góc, gốc A sao cho B (3;0;0), C(0;4;0), D(0;0;4). mặt phẳng (BCD) có phương trình:	
	$$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} - 1 = 0$$	1/4
	Khoảng cách cần tính là:	
	$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}}} = \frac{6\sqrt{34}}{17} \quad \text{(cm)}$$	1/4

	Cách 2 Từ giả thiết suy ra tam giác ABC vuông tại A, do đó AB ⊥AC.	1/4
	Lại có AD ⊥mp(ABC) ⇒ AD ⊥AB và AD ⊥ AC, nên AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. 	1/4
	Gọi AE là đường cao của tam giác ABC; AH làđường cao của tam giác ADE thì AH chính là khoảng cách cần tính: Dễ dàng chứng minh được hệ thức: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$	1/4
	Thay AC = AD = 4cm; AB = 3cm vào hệ thức trên ta tính được: $AH = \frac{6\sqrt{34}}{17}$ cm	1/4
	Cách 3: Từ giả thiết suy ra tam giác ABC vuông tại A, do đó AB ⊥ AC.	

	Lại có AD $\perp$ mp(ABC) $\Rightarrow$ AD $\perp$ AB và AD $\perp$AC, nên AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Gọi V là thể tích tứ diện ABCD, ta có $V = \frac{1}{6}AB.AC.AD = 8$ Áp dụng công thức $AH = \frac{3V}{dt(\Delta BCD)}$ với $V = 8$ và $dt(\Delta BCD) = 2\sqrt{34}$ ta tính được $AH = \frac{6\sqrt{34}}{17}$ cm.	1/4 1/2
	Cách 1: Mặt phẳng (P) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}(2;-1;0)$. Đường thẳng d_m có véc tơ chỉ phương $\vec{u}\left((1-m)(2m+1);-(2m+1)^2-m(1-m)\right)$ Suy ra $\vec{u}.\vec{n} = 3(2m+1)$ d_m song song với (P) $\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}\perp\vec{n} \\ d_m \not\subset (P) \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}.\vec{n} = 0 \\ \exists A \in d_m, A \notin (P) \end{cases}$ Ta có: điều kiện $\vec{u}.\vec{n} = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$	1/4 1/4 1/4
	Mặt khác khi $m = -\frac{1}{2}$ thì d_m có phương trình: $\begin{cases} y - 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$, mọi điểm A (0;1;a) của đường thẳng này đều không nằm trong (P) nên điều kiện $\{\exists A \in d_m, A \notin (P)$ được thoả mãn. ĐS: m = -1/2	1/4

	Cách 2: Viết phương trình d_m dưới dạng tham số ta được $\begin{cases} x = (1-m)(2m+1)t \\ y = 1-(2m+1)^2 t \\ z = -2-m(1-m)t \end{cases}$	1/4
	d_m // (P) ⇔ hệ phương trình ẩn ta sau $\begin{cases} x = (1-m)(2m+1)t \\ y = 1-(2m+1)^2 t \\ z = -2-m(1-m)t \\ 2x-y+2=0 \end{cases}$ vô nghiệm	1/4
	⇔ Phương trình ẩn t sau 3(2m+1)t + 1 = 0 vô nghiệm	1/4
	⇔ m= -1/2	1/4
	Cách 3: d_m// (P) ⇔ hệ phương trình ẩn x, y, z sau (H) $\begin{cases} 2x-y+2=0 \\ (2m+1)x+(1-x)y+m-1=0 \\ mx+(2m+1)z+4m+2=0 \end{cases}$ vô nghiệm	1/4
	Từ 2 phương trình đầu của hệ phương trình trên suy ra $\begin{cases} x = \dfrac{m-1}{3} \\ y = \dfrac{2m+4}{3} \end{cases}$	1/4
	Thế x, y tìm được vào phương trình thứ ba ta có: $(2m+1)z = -\frac{1}{3}\left(m^2+11m+6\right)$	1/4
	Hệ (H) vô nghiệm ⇔ $m = -\frac{1}{2}$	1/4
V		2đ
	1. Ta có: $(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$	1/4

	Cho x = 2 ta được $3^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$	1/4
	$\Rightarrow 3^n = 243 = 3^5 \Leftrightarrow n = 5$	1/2
	2. Cách 1: Giả sử M (m;0) và N(0;n) với m > 0, n > 0 là hai điểm chuyển động trên hai tia 0x và 0y. Đường thẳng MN có phương trình : $\frac{x}{m}+\frac{y}{m}-1=0$	1 1/4
	Đường thẳng này tiếp xúc với (E) khi và chỉ khi: $16\left(\frac{1}{m}\right)^2+9\left(\frac{1}{n}\right)^2=1$	1/4
	Theo BĐT Côsi ta có: $MN^2 = m^2+n^2 = \left(m^2+n^2\right)\left(\frac{16}{m^2}+\frac{9}{n^2}\right)$ $= 25+16\frac{n^2}{m^2}+9\frac{m^2}{n^2} \ge 25+2\sqrt{16.9} = 49 \Rightarrow MN \ge 7$	1/4
	Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{16n^2}{m^2}=\frac{9m^2}{n^2} \\ m^2+n^2=49 \Leftrightarrow m=2\sqrt{7}, n=\sqrt{21}. \\ m>0, n>0 \end{cases}$ KL: Với $M\left(2\sqrt{7};0\right), N\left(0;\sqrt{21}\right)$ thì MN đạt GTNN (MN) = 7.	1/4
	2. Cách 1 Giả sử M (m;0) và N(0;n) với m > 0, n > 0 là hai điểm chuyển động trên hai tia 0x và 0y. Đường thẳng MN có phương trình : $\frac{x}{m}+\frac{y}{m}-1=0$	1 1/4

	Đường thẳng này tiếp xúc với (E) khi và chỉ khi: $16\left(\frac{1}{m}\right)^2+9\left(\frac{1}{n}\right)^2=1$ Theo BĐT Côsi ta có: $MN^2=m^2+n^2=\left(m^2+n^2\right)\left(\frac{16}{m^2}+\frac{9}{n^2}\right)$ $=25+16\frac{n^2}{m^2}+9\frac{m^2}{n^2}\geq 25+2\sqrt{16.9}=49\Rightarrow MN\geq 7$ - Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases} m:\frac{4}{m}=n:\frac{3}{n}\\ m^2+n^2=7\\ m>0, n>0\end{cases}\Leftrightarrow m=2\sqrt{7}, n=\sqrt{21}.$ KL: Với $M\left(2\sqrt{7};0\right), N\left(0;\sqrt{21}\right)$ thì MN đạt GTNN (MN) = 7.	1/4 1/4 1/4
	Cách 3 Phương trình tiếp tuyến tại điểm $(x_0; y_0)$ thuộc (E): $\frac{xx_0}{16}+\frac{yy_0}{9}=1$	1/4
	Suy ra toạ độ của M và N là $M\left(\frac{16}{x_0};0\right)$ và $N\left(0;\frac{9}{y_0}\right)$ $\Rightarrow MN^2=\frac{16^2}{x_0^2}+\frac{9^2}{y_0^2}=\left(\frac{x_0^2}{16}+\frac{y_0^2}{9}\right)\left(\frac{16^2}{x_0^2}+\frac{9^2}{y_0^2}\right)$ Sử dụng bất đẳng thức Côsi hoặc Bunhiacôpki (như cách 1 hoặc cách 2) ta có $MN^2\geq 7^2$ - Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x_0=\frac{8\sqrt{7}}{7}; y_0=\frac{3\sqrt{21}}{7}$ - Khi đó $M\left(2\sqrt{7};0\right), N\left(0;\sqrt{21}\right)$ thì MN đạt GTNN (MN) = 7.	1/4 1/4 1/4